

1921.

MAY 23 1921

No. 7.

GENERAL LIBRARY

MAY 23 1921

UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 64. Heft 7.

DER GANZEN REIHE 360. BANDES 7. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



*acc 7/7/21
filled*

LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1921 erscheinen Bd. 64, 65 und 66 à 8 Hefte. Preis von Bd. 64 M. 60.—.
Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 19. April 1921.

Inhalt.

	Seite
1. Ernst Reichenbächer. Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld in einer elektrizitätsfreien Welt	577
2. B. Wwedensky. Über die Wirbelströme bei der spontanen Änderung der Magnetisierung	609
3. Richard Gans. Über die reversible magnetische Permeabilität. Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Fritz Erhardt	621
4. A. Becker und H. Holthusen. Über die Trägererzeugung hochfrequenter Wellenstrahlung in abgeschlossenen Gasräumen	625
5. Karl F. Herzfeld. Zur kinetischen Theorie des osmotischen Druckes	646
6. W. Seitz. Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen. (III. Teil.)	661
7. W. Hahnemann und H. Hecht. Entgegnung auf die Bemerkung von M. Wien zu unserer Arbeit: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“	671

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Leopoldstraße 91.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einsuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst **sorgfältiger** Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



syn
7
Gle
dal
es
zie
mi
die
gru
sic
Pa
lie
tre

der
ge

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 64.

1. *Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld
in einer elektrizitätsfreien Welt¹⁾;*
von Ernst Reichenbächer.

I. Ergänzung und Umbildung der Feldgleichungen.

In meiner Arbeit VI hatte ich auf S. 138 für den kugelsymmetrischen Fall im ganzen 6 Gleichungen *A* bis *F* mit 7 Unbekannten aufgestellt (wenn die Eichung gemäß der Gleichung 9 auf S. 117 getroffen worden ist) und hinzugefügt, daß ich eingehendere Lösungsversuche zurückstellen wollte, bis es mir gelänge, eine passende Hilfhypothese für die 7. Beziehung zwischen jenen Unbekannten zu wählen. Nun scheint mir diese durch die nachfolgende Überlegung gegeben zu sein, die allerdings die Annahme voraussetzt, daß der von mir zugrunde gelegte Faktor l oder $e^{\frac{1}{2}l}$ der Gravitationsverzerrung sich auf eine Koordinate bezieht, die in der einen der beiden Parameterflächen des natürlichen elektromagnetischen Systems liegt, in denen allein Komponenten des Sechservektors auftreten²⁾, und die überdies zeitartigen Charakter hat. Diese

1) Ich werde des öfteren meine früheren, sämtlich in den Annalen der Physik erschienenen, Arbeiten zu diesem Punkte unter den beigegebenen Nummern anführen:

- I. Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation, nebst Nachtrag. 52. S. 134. 1917.
- II. Das skalare Gravitationspotential. 61. S. 1. 1920.
- III. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation. 61. S. 21. 1920.
- IV. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde. 61. S. 25. 1920.
- V. Über die Nichtintegrabilität der Streckenübertragung und die Weltfunktion in der Weylschen verallgemeinerten Relativitätstheorie. 63. S. 93. 1920.
- VI. Die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität innerhalb der Materie 63. S. 115. 1920.

2) Vgl. VI, S. 122.

auch im allgemeinen Falle sehr wahrscheinliche Voraussetzung ist offenbar dann gegeben, wenn das Feld Kugelsymmetrie zeigt, die zeitliche der Verzerrung unterworfenene Richtung also parallel der hier als Gerade auftretenden Weltlinie des Elektrons läuft, demnach überall in die einzige hier vorhandene, überdies ebene, Fläche des Sechservektors in jedem Punkte fällt.

Gilt diese von mir geforderte Annahme, so kann ich daher ein Koordinatensystem wählen, innerhalb dessen nur die Komponenten f_{01} und f_{23} des Sechservektors von 0 verschieden sind und in dem die Gravitationswirkung sich in einer Verzerrung der x^0 -Linien äußert. Die anderen Koordinaten bleiben entweder völlig ungeändert oder sind nur solchen Abweichungen unterworfen, die die Feldgleichung $\mathfrak{K} = 2 \text{ Div Grad } \mathfrak{A}$ zulassen, wenn man die elektrischen Wirkungen dabei nicht berücksichtigt.¹⁾ Nun kann ich in einem solchen Systeme das Eingehen des Gravitationsskalars \mathfrak{A} in die Komponenten des Fundamentaltensors auch nach der Verzerrung verfolgen und brauche nicht wie in meiner Arbeit VI auf die unverzerrten Koordinaten zurückzugreifen. Er ist nämlich nur in $g_{00} = e^{2\mathfrak{A}} g_{00}'$ (also $g^{00} = e^{-2\mathfrak{A}} g^{00}'$) und daher auch in G (in derselben Weise, d. h. als Faktor $e^{2\mathfrak{A}}$) enthalten. Jetzt gehe ich wieder von dem Ansatz für die Weltfunktion²⁾:

$$\mathfrak{B} = f^2 + \frac{1}{\mathfrak{A}} [\mathfrak{B} \mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}) g^2]^2$$

aus. Bei der Bildung der Variationen ist jetzt, also im verzerrten Systeme, zu beachten, daß \sqrt{G} , f^2 , \mathfrak{B} und \mathfrak{F} ³⁾ nur von \mathfrak{A} , g^2 von $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}$ abhängen, und zwar ist

$$\begin{aligned} \sqrt{G} f^2 &= e^{\mathfrak{A}} \sqrt{G'} (e^{-2\mathfrak{A}} g^{00'} g^{11} f_{01}^2 + g^{22} g^{33} f_{23}^2) \\ &= (e^{-\mathfrak{A}} g^{00'} g^{11} f_{01}^2 + e^{+\mathfrak{A}} g^{22} g^{33} f_{23}^2) \sqrt{G'}, \end{aligned}$$

1) Vgl. hierzu II.

2) Vgl. hierzu VI, S. 115 u. 119.

3) Es ist doch wohl folgerichtiger, entgegen meiner früheren Festsetzung (I. S. 178. V, S. 108) \mathfrak{F} wegen des im Nenner der Divergenz auftretenden Gliedes \sqrt{G} als von \mathfrak{A} abhängig anzusehen. Würde ich davon absehen und gleichzeitig $\sqrt{G} g^{\mu e} g^{\nu \sigma} f_{e \sigma}$ als bei der Variation unveränderliche Quantitätsgröße behandeln, so ergäbe sich unmittelbar wieder Gleichung 18 in VI, S. 122.

$$\begin{aligned}\sqrt{G} \mathfrak{F} &= -\sqrt{G} \mathfrak{K} - 3 \frac{\partial \sqrt{G} \varphi^r}{\partial x^r} - \frac{3}{2} \sqrt{G} (\varphi_r \varphi^r) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\mu} - 3 \frac{\partial \sqrt{G} \varphi^r}{\partial x^r} - \frac{3}{2} \sqrt{G} (\varphi_r \varphi^r).\end{aligned}$$

Bei der Variation will ich nun die „Quantitätsgrößen“ $\sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\mu}$ und $\sqrt{G} g^{\mu\nu} \varphi_\mu$ unverändert lassen¹⁾; das kann ich aber nicht mit $\sqrt{G} g^{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} f_{\sigma\sigma}$ tun, da die zur Intensitätsgröße $f_{\mu\nu}$ gehörige Quantitätsgröße nach Mie²⁾ doch wohl mit $\sqrt{G} h^{\mu\nu}$ identisch ist, der Verschiebungsvektor $h^{\mu\nu}$ aber in die Weltfunktion als nicht eichinvariant nicht aufgenommen ist.

Dann erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{F} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} &= (-e^{-\mathfrak{H}} g^{00'} g^{11} f_{01}^2 + e^{\mathfrak{H}} g^{23} g^{33} f_{23}^2) \sqrt{G}' \\ &= -\sqrt{G} (f_{01} f^{01} - f_{23} f^{23}) \\ \frac{\partial \mathfrak{F} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} &= -\sqrt{G} \sqrt{\mathfrak{F}^4 - (\mathfrak{H}\mathfrak{F}')^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{H}} = -\mathfrak{F}, \text{ da } \frac{\partial \mathfrak{F} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} = 0 \text{ und } \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} = \sqrt{G} \text{ ist. Daher}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{H}} \frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{H}} [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2]^2 &= \frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{H}^2} (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}') [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2]^2 \\ &+ \frac{2\sqrt{G}}{\mathfrak{H}} [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2] [-(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}') \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}'' - 2\mathfrak{H}') g^2].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{H} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} &= -\sqrt{G} \sqrt{\mathfrak{F}^4 - (\mathfrak{H}\mathfrak{F}')^2} - \frac{\sqrt{G}}{\mathfrak{H}^2} [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2] \\ &[\mathfrak{H} (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}') \mathfrak{F} + 2\mathfrak{H} (\mathfrak{H}'' - 2\mathfrak{H}') g^2 + (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}') \mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2].\end{aligned}$$

Wie in V. und VI. ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\mu} = -\frac{2}{\mathfrak{H}} [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2] (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\nu} \sqrt{G}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathfrak{H} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{H}} = -\frac{2}{\mathfrak{H}} [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2] (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) \sqrt{G}$$

$$\begin{aligned}\left[\text{Div Grad } \mathfrak{H} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg [\mathfrak{H} \mathfrak{F} - (\mathfrak{H}' - 2\mathfrak{H}) g^2]}{\partial x^\mu} \right. \\ \left. + \frac{\mathfrak{H}'' - 2\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H} - 2\mathfrak{H}} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\mu} \right].\end{aligned}$$

1) Vgl. V. S. 108.

2) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. 37. S. 518/9. 1912.

In der bei der Variation herauskommenden Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{B} \sqrt{G}}{\partial \mathfrak{A}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathfrak{B} \sqrt{G}}{\partial x^\mu}$$

heben sich die unterstrichenen Glieder auf; die übrigen ergeben nach Division durch \sqrt{G} :

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} - \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}^2} [\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2] [\mathfrak{B}\mathfrak{F} + (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2] \\ & = -\frac{2}{\mathfrak{B}} [\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2] [\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}] \left[\text{Div Grad } \mathfrak{A} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu} \right. \\ & \quad \left. + g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg [\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2]}{\partial x^\mu} \right]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nun nach VI, S. 122, Gleichung (18)

$$= \frac{1}{\mathfrak{B}} (\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2) [\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}] \left[\mathfrak{F} + g^2 \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}} \right].$$

Die Variation im verzerrten Systeme führt also zum gleichen Ergebnis wie die im unverzerrten, wenn

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} = \frac{1}{\mathfrak{B}^2} [\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2] [\mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\mathfrak{F} \\ & \quad + (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')(\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2 + \mathfrak{B}(\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{F} + (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})\mathfrak{B}'g^2] \\ & = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2. \end{aligned}$$

Es kann also nur Übereinstimmung zwischen beiden Verfahren herrschen, wenn

$$(1) \quad [\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2]^2 = \mathfrak{B} \sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2}^2$$

gesetzt wird. Diese Gleichung, die ebenfalls eich- und koordinateninvariant ist, will ich nun mit heranziehen, um im kugelsymmetrischen Falle die Unbestimmtheit des Problems zu beseitigen.

1) Es ist übrigens nach VI, S. 142, Gleichung (34)

$$\sqrt{\mathfrak{f}^4 - (\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*)^2} = \frac{2\mathfrak{Z}_0^0}{p},$$

wo \mathfrak{Z}_0^0 die Ruhenergie des elektromagnetischen Feldes und p den Skalar in der Gleichung

$$h_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \cdot p + f_{\mu\nu}^* \cdot p$$

zwischen Verschiebungsvektor h und Feldvektor f bedeutet. Man erhält also auch

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B})g^2] = \frac{2\mathfrak{B}}{p} \mathfrak{Z}_0^0.$$

Die Wahl der von \mathfrak{A} allein abhängigen Größe \mathfrak{B} , die bisher der größeren Allgemeinheit zuliebe offen gelassen war, ist nun in Übereinstimmung mit meinen Arbeiten V und VI dahin zu treffen, daß sie gleich der Weylschen Konstanten $-\frac{1}{\rho}$ gesetzt wird, damit die Feldgleichung (18) in VI in meine frühere (VI 5)

$$(2) \quad \mathfrak{R} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A}$$

bei Abwesenheit der Elektrizität übergeht. Ich will aber dies gleich verallgemeinern, da die von mir in VI, S. 127, Gleichungen (16a) aufgestellten Beziehungen das restlose Verschwinden der elektromagnetischen Größen unmöglich machen, weil die Konstante κ von 0 verschieden gewählt werden muß (Gleichung (8) auf S. 126) und daher

$$(2a) \quad \mathfrak{R} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A} + \mathfrak{R}_0,$$

worin \mathfrak{R}_0 die Krümmung der ursprünglichen, d. h. gravitationsfreien, Raumzeitmannigfaltigkeit bedeutet und im einfachsten Falle konstant anzunehmen ist ($-\frac{6}{R^2}$ in der Zylinderwelt Einsteins, $-\frac{12}{R^2}$ in der de Sitterschen Welt konstanter Krümmung).

II. Die Bestimmung der Fundamentalkomponente g_{11} .

Während die soeben getroffene Erweiterung völlig in den Rahmen meiner Theorie des skalaren Gravitationspotentials hineinpaßt¹⁾, ist es eine andere Frage, ob es sich mit dieser verträgt, die Fundamentalkomponente g_{11} von 1 verschieden anzunehmen, was zu einer Verzerrung des Ruhraums des anziehenden Massenpunktes führt, wie sie z. B. Einstein annimmt, um sämtliche Komponenten $K_{\mu\nu}$ des verjüngten Krümmungstensors zum Verschwinden zu bringen. Ich hatte in meinen bisherigen Arbeiten von einer solchen Verzerrung abgesehen, aber wiederholt betont, daß das skalare Potential auch möglich ist, wenn man sie annimmt. In welchem Umfange das zutrifft, will ich nun untersuchen. Dabei will ich

1) Vgl. II, S. 17, Gleichung (1), worin \mathfrak{R} durch \mathfrak{R}_0 , \mathfrak{K} durch \mathfrak{K} zu ersetzen wäre.

mich aber, um im Rahmen der vorliegenden Arbeit zu bleiben, auf das Feld eines Massenpunktes beschränken; als unverzerrte Ausgangsmannigfaltigkeit nehme ich die Einsteinsche Zylinderwelt an, die für $R = \infty$ das Minkowskische Kontinuum mit umfaßt und auch, wie wir sehen werden, Gelegenheit gibt, den de Sitterschen Fall mit zu erledigen.

Dabei will ich mich der Gleichung (10) auf S. 11 meiner Arbeit II bedienen, die es ermöglicht, die lästigen Berechnungen der Krümmung aus den Christoffelschen und Riemannschen Symbolen zu vermeiden. Das Linienelementquadrat (L. E. Q.) der betrachteten Mannigfaltigkeit mit räumlicher Kugelsymmetrie sei

$$ds^2 = g_{00} dx^0{}^2 + g_{11} dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2.$$

Dabei ist g_{00} beliebig, z. B. für die unverzerrte Zylinderwelt 1, für die Welt konstanter Krümmung $R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta$, g_{11} aber nur von r abhängig.

Für zwei Dimensionen ($dx^0 = d\vartheta = 0$) erhalte ich im Falle $g_{11} = 1$ aus der Gleichung 10, da \mathfrak{k} , die Krümmung einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, verschwindet, und g_{22} , das hier die Stelle von g_{00} vertritt, gleich $R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$ ist:

$$\mathfrak{K} = 0 + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 = - \frac{2}{R^3 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} = - \frac{2}{R^3},$$

natürlich ein selbstverständliches Ergebnis, wenn man sich erinnert, daß das Riemannsche Krümmungsmaß bei Anwendung unserer Definition von $K_{\mu\nu}$ das negative Doppelte des Gaußschen ist. Ich möchte sogleich darauf hinweisen, daß bei dieser Berechnung die erste Klammer in Gleichung (10) wegfällt, da die Determinante g der Fundamentalkomponenten der Untermannigfaltigkeit von der neu hinzutretenden Koordinate unabhängig ist. Das wird der Fall sein, solange g_{11} gleich 1 gesetzt wird.

Für drei Ausdehnungen lehrt Gleichung 10, da $\mathfrak{k} = -\frac{2}{R^2}$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = g = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$, $g_{00}(g_{33}) = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi$, $ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2$, daß

$$\mathfrak{K} = -\frac{2}{R^2} + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d \lg g_{00}}{dr} \frac{d \lg \sqrt{g}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{d\varphi} \right)^2 \right]$$

wird.

$$\mathfrak{K} = -\frac{2}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} \left[-\frac{2}{\sin^2 \varphi} + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right] = -\frac{6}{R^2}.$$

Für vier Dimensionen liefert sie bei dem Einsteinschen L. E. Q.:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + dx^{02}$$

natürlich sofort $\mathfrak{K} = \mathfrak{f} = -\frac{6}{R^2}$. Ist aber im de Sitterschen Falle:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta dx^{02},$$

so wird

$$\mathfrak{f} = -\frac{6}{R^2}, g_{11} = 1, g_{22} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}, g_{33} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi, \\ g = R^4 \sin^4 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi, g_{00} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta,$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^2} + \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d \lg g_{00}}{dr} \frac{d \lg \sqrt{g}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\varphi^2} + \frac{d \lg g_{00}}{d\varphi} \frac{d \lg \sqrt{g}}{d\varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{d\varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{g_{33}} \left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{d\vartheta} \right)^2 \right]$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{4}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{2}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} \left[-\frac{2}{\sin^2 \varphi} + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right] + \frac{1}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi} \left[-\frac{2}{\sin^2 \vartheta} + 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta \right]$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{12}{R^2}.$$

Die Fortsetzung des Verfahrens liefert, wie leicht ersichtlich, für n Ausdehnungen

$$\mathfrak{K} = - \frac{n(n-1)}{R^3},$$

woraus die Gaußsche Krümmung sich, wie selbstverständlich, zu $\frac{n(n-1)}{2R^2}$ ergibt. Aus der Krümmung $K = -\frac{6}{R^2}$ der unverzerrten Zylinderwelt kann man nun nach Gleichung (1) auf S. 17 der Arbeit II die Krümmung \mathfrak{K}' für den Fall berechnen, daß g_{00} von 1 verschieden (aber von x^0 unabhängig) ist, was man dann auch für die de Sitterwelt spezialisieren kann. Es ist aber dabei zu beachten, daß g_{00} in unserem Sinne gleich der Größe l^2 der angegebenen Gleichung ist, während das dortige $g_{00} = 1$ wird. Danach bekommt man für das L. E. Q.: $ds^2 = g_{00} dx^{02} + dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2$ das Krümmungsmaß

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^3} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}}.$$

(Setzt man $g_{00} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta$ mit de Sitter, so wird $\operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} = -\frac{3}{R^3}$, also $\mathfrak{K} = -\frac{12}{R^3}$).

Will ich nun aber noch die nur von r abhängende Größe g_{11} anführen, so kann ich nicht die Gleichung (1) auf S. 17 benutzen, woran man wohl denken könnte, wenn man die Indizes 0 und 1 vertauscht; denn zu der Gültigkeit dieser Gleichung gehört die Voraussetzung (vgl. S. 15), daß der Verzerrungsfaktor l von der betreffenden Koordinate x^0 (hier also r !) unabhängig ist. Hier ist ja aber gerade gefordert, daß das l entsprechende $\sqrt{g_{11}}$ nur Funktion von x^1 oder r ist. Ich wende also wieder Gleichung (10) auf S. 11 an, in der ich ebenfalls die Indizes 0 und 1 vertausche. Setze ich dann zunächst $g_{11} = 1$, so erhalte ich die Krümmung \mathfrak{K} der 023-Räume in der Welt mit dem L. E. Q.:

$$ds^2 = g_{00} dx^{02} + dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\varphi^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi d\vartheta^2$$

und

$$\mathfrak{K} = -\frac{6}{R^3} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}}.$$

Daher erhält man nach Gleichung (10) auf S. 11:

$$f = -\frac{6}{R^2} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} - \left\{ \frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d^2 \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} + \frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 + 2 \left(\frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right)^2 \right] \right\}$$

$$f = -\frac{6}{R^2} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} - \left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d^2 \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d \lg g_{00}}{dr} \frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right)^2 \right]$$

$$f = -\frac{6}{R^2} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} - \left[\frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d^2 \sqrt{g_{00}}}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d \sqrt{g_{00}}}{dr} \frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} - \frac{4}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{6}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{r}{R} \right]$$

$$f = -\frac{6}{R^2} + 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} \\ - \left[\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr} \right. \\ \left. + \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2} \right]. \quad ^1)$$

1) Durch Auflösen der Divergenz erhält man die Gleichung:

$$f = -\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{\sin \varphi \sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi \sqrt{g_{00}}}{g_{33}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\varphi} \\ + \frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sqrt{g_{00}}}{g_{33}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\vartheta}$$

Tritt nun aber zum L. E. Q. das Glied $g_{11} dr^2$ hinzu, so vergrößert sich wiederum nach Gleichung (10) auf S. 11 f um das Glied

$$\begin{aligned} \Re - f = \frac{1}{g_{11}} & \left[\frac{d^2 \lg g_{00}}{dr^2} + \frac{d^2 \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{d \lg g_{00}}{dr} \frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} + \frac{3}{8} \left(\frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right)^2 \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{d \lg g_{11}}{dr} \left(\frac{d \lg g_{00}}{dr} + \frac{d \lg R^4 \sin^4 \frac{r}{R}}{dr} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re - f = \frac{1}{g_{11}} & \left[\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr} \right. \\ & \left. + \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2} - 2 \frac{d \lg \sqrt{g_{11}}}{dr} \frac{d \lg R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}}}{dr} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re - f = \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00} g_{11}}} & \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr} \\ & + \frac{2}{g_{11}} \frac{d \lg \sqrt{g_{11}}}{dr} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr} + \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2} \right) \\ & - \frac{2}{g_{11}} \frac{d \lg \sqrt{g_{11}}}{dr} \frac{d \lg R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00}}}{dr} . \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin den Wert von f (vgl. Anmerkung 1), so erhält man:

mit $g_{22} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$, $g_{33} = R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin^2 \varphi$, die für ein nur von r abhängiges g_{00} den selbstverständlichen Wert $-\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}$, hingegen den ebenso trivialen Ausdruck $-\frac{6}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}}$ liefert, wenn in g_{00} noch die Faktoren $\sin^2 \varphi$ hinzutreten.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = & -\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} + \frac{2}{\sin \varphi \sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi \sqrt{g_{10}}}{g_{11}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\varphi} \\ & + \frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sqrt{g_{00}}}{g_{33}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{d\vartheta} + \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00} g_{11}}} \\ & \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{10}}{g_{11}}} \frac{d \lg \sqrt{g_{00}}}{dr} \\ & + \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R}} - \frac{6}{R^2} \right) - \frac{4}{g_{11}} \frac{d \lg \sqrt{g_{11}}}{dr} \cdot \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} \end{aligned}$$

$\mathfrak{K} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}}$ im neuen System

$$+ \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \cos \frac{r}{R}} \frac{d}{dr} \left[R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R} \left(\frac{1}{g_{11}} - 1 \right) \right] - \frac{6}{R^2}.$$

Ist nun

$$(3) \quad \frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b}{R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R}},$$

so erhält man sofort

$$\mathfrak{K} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \lg \sqrt{g_{00}} - \frac{6}{R^2},$$

d. h. die Gleichung 2a mit $\mathfrak{K} = \lg \sqrt{g_{00}}$ und $\mathfrak{K}_0 = -\frac{6}{R^2}$. Damit also die Krümmung durch die doppelte Divergenz des Gradienten der Größe $\lg \sqrt{g_{00}}$ in der erweiterten Gestalt 2a wiedergegeben werden kann, ist es nötig, $\frac{1}{g_{11}}$ in der Form (3) anzusetzen. Selbstverständlich gilt diese auch für unendliche und imaginäre Werte von $R (=iQ)$ und geht dann über in

$$(3a) \quad \frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b}{r}$$

$$(3b) \quad \frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{8b}{Q} \left(e^{\frac{r}{Q}} - e^{-\frac{r}{Q}} \right)^{-1} \left(e^{\frac{r}{Q}} + e^{-\frac{r}{Q}} \right)^{-2}.$$

Würde man dagegen, um die Konstante $-\frac{6}{R^2}$ zum Wegfall zu bringen, ansetzen

$$\frac{1}{g_{11}} = 1 + \frac{b + R \sin^2 \frac{r}{R}}{R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R}}, \quad g_{11} = \cos^2 \frac{r}{R} \left(1 + \frac{b}{R \sin \frac{r}{R}} \right)^{-2},$$

so erhält man genau das gleiche Ergebnis, wie im Falle (3a).

Noch in einem anderem Falle ist es möglich, die Gültigkeit der Gleichung (2a) aufrechtzuerhalten, wenn man nämlich

$$g_{11} = \frac{\cos^2 \frac{r}{R}}{g_{00}}$$

setzt. Dann wird nämlich das Zusatzglied

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \cos \frac{r}{R}} \frac{d}{dr} \left[R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R} \left(\frac{1}{g_{11}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{2}{R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{g_{00} g_{11}}} \frac{d}{dr} R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \cdot \frac{\cos \frac{r}{R}}{R \sin \frac{r}{R}} (1 - g_{11}) \\ &= 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \int \frac{dr}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} (1 - g_{11}). \end{aligned}$$

In diesem Falle müßte aber

$$\mathfrak{A} = \lg \sqrt{g_{00}} + \int \frac{dr}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R} (1 - g_{11})$$

gesetzt werden, was für $R = \infty$ in

$$\mathfrak{A} = \lg \sqrt{g_{00}} + \int \frac{1 - g_{11}}{r} dr$$

übergehen, d. h. die Formel X in I, S. 177 liefern würde. Aber mir scheint die Annahme einer von $\lg \sqrt{g_{00}}$ verschiedenen Größe für \mathfrak{A} mit dessen Deutung als Gravitationspotential unverträglich, wie aus der Untersuchung der Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde hervorgeht (vgl. hierzu I, S. 155 f. u. IV).

Für den Einsteinschen Ansatz

$$g_{00} = 1 - \frac{a}{r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}$$

decken sich die beiden Fälle; dann könnte man auch

$$g_{11} = e^{-2\mathfrak{A}}$$

(vgl. VI, S. 138) setzen. Das trifft aber nicht allgemein zu, für die angesetzten I. E. Q. gilt vielmehr die Gleichung (3).

III. Die Feldgleichungen.

Ich will jetzt die so ergänzten und umgebildeten Feldgleichungen aufstellen, wobei ich gleich die für das Folgende nicht mehr nötige Größe \mathfrak{A} eliminieren und nach \mathfrak{F} (VI, S. 138) g^2 durch $g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2$ ersetze. Ferner ist zu beachten, daß

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{\beta}, \quad \mathfrak{B}' = 0, \quad \mathfrak{B} \mathfrak{F} - (\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}) g^2 = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \sqrt{\mathfrak{F}^2 - (\mathfrak{F}'^2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\beta}} \mathfrak{F}^2 = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \sqrt{g^{00} g^{11}} \frac{d q_0}{d r} = \sqrt{\frac{g^{11}}{\beta}} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d q_0}{d r}$$

ist.¹⁾ So erhält man denn

$$(A') \quad \begin{cases} -\mathfrak{F} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A} + 2 g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg (\mathfrak{F} + 2 g^2)}{\partial x^\mu} \\ = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{d r} \sqrt{G} g^{11} \frac{d \mathfrak{A}}{d r} + 2 g^{11} \frac{d \mathfrak{A}}{d r} \frac{d}{d r} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d \mathfrak{A}}{d r} \right)^2 \right], \end{cases}$$

$$(B') \quad \begin{cases} \operatorname{Div}_0 f = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{d r} \sqrt{G} e^{-2\mathfrak{A}} g^{11} \frac{d q_0}{d r} \\ = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g^{11}}{\beta}} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d q_0}{d r} \cdot e^{-2\mathfrak{A}} q_0, \end{cases}$$

$$(C') \quad \begin{cases} \operatorname{Div}_1 f = 0 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g^{11}}{\beta}} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d q_0}{d r} g^{11} \\ \left\{ q_1 - \frac{d}{d r} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d \mathfrak{A}}{d r} \right)^2 \right] \right\}; \\ \text{also } q_1 = \frac{d}{d r} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d \mathfrak{A}}{d r} \right)^2 \right], \end{cases}$$

$$(D') \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{d r} \sqrt{G} g^{11} q_1 + e^{-2\mathfrak{A}} q_0^2 + g^{11} q_1^2 = \frac{\mathfrak{x}}{s},$$

$$(E') \quad \mathfrak{F} + 2 g^2 = + \sqrt{g^{11} \beta} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d q_0}{d r} = \mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d \mathfrak{A}}{d r} \right)^2.$$

Hierzu kommt noch die Festlegung der Eichung nach der erweiterten Gleichung (9, VI, S. 117)

$$(F') \quad \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{G}} \frac{d}{d r} \sqrt{G} g^{11} q_1 + \frac{3}{2} (e^{-2\mathfrak{A}} q_0^2 + g^{11} q_1^2) \\ = 2 \frac{d \mathfrak{A}}{d r} g^{11} \frac{d}{d r} \lg \left[\mathfrak{F} + 2 g^{11} \left(\frac{d \mathfrak{A}}{d r} \right)^2 \right] + \mathfrak{R}_0 \\ = 2 g^{11} \frac{d \mathfrak{A}}{d r} q_1 + \mathfrak{R}_0, \end{cases}$$

und es ist nach (3)

$$g^{11} = 1 + \frac{b}{R \sin \frac{r}{R} \cos^2 \frac{r}{R}},$$

1) Bei dieser Gelegenheit will ich gleich zwei Flüchtigkeiten auf S. 138 der Arbeit VI berichtigen. Es fehlt in Gleichung (A) der Faktor g^{11} , in (B) aber g^{00} , jedesmal hinter $\frac{d}{d r} \sqrt{G}$.

ferner

$$\sqrt{G} = e^{\mathfrak{A}} \sqrt{g_{11}} \cdot R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \sin \varphi$$

zu setzen.

Aus (A') und (E') ist \mathfrak{F} leicht zu eliminieren:

$$(A'') \quad \begin{cases} -\sqrt{g^{11}} \beta e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \\ + 2 g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \frac{d}{dr} \lg \left(\sqrt{g^{11}} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) - 2 g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2. \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält nun ebenso wie (B') nur noch die beiden Unbekannten \mathfrak{A} und φ_0 .

Durch Umformung erhält man:

$$(A''') \quad -\frac{e^{-\mathfrak{A}} \sqrt{\beta} \frac{d\varphi_0}{dr}}{2 \sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}} = \frac{d}{dr} \lg \left[\sqrt{G} (g^{11})^3 \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \frac{d\varphi_0}{dr} \cdot e^{-2\mathfrak{A}} \right]$$

$$(B') \quad \frac{d}{dr} \lg \left[\sqrt{G} e^{-2\mathfrak{A}} g^{11} \frac{d\varphi_0}{dr} \right] = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{\beta g^{11}}} e^{-\mathfrak{A}} \varphi_0$$

und hieraus durch Addition und Multiplikation mit $2 \sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr}$:

$$(B'') \quad -e^{-\mathfrak{A}} \sqrt{\beta} \frac{d\varphi_0}{dr} = 2 \frac{d}{dr} \sqrt{g^{11}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} - 3 \sqrt{\frac{1}{\beta}} e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \cdot \varphi_0.$$

Diese Gleichung würde für die Wahl $\beta = 3$ ein erstes Integral in geschlossener Gestalt zulassen, worauf dann $e^{\mathfrak{A}}$ durch eine Gleichung 2. Ordnung und aus $\mathfrak{A} \varphi_0$ durch eine solche 1. Ordnung sich ergibt.

Allgemein aber will ich zwei neue Veränderliche einführen:

$$(A''') \quad e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = u \sqrt{g_{11}} \cdot R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R}, \quad e^{-\mathfrak{A}} \cdot \varphi_0 = v,$$

woraus folgt

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dr} = \frac{1}{v} \left[u \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{dv}{dr} \right].$$

$$(B') \quad \begin{cases} -\sqrt{\beta g_{11}} u R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} = 2 \frac{d}{dr} \left[\frac{u}{v} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{1}{v \sqrt{g_{11}}} \frac{dv}{dr} \right] \\ - 3 \sqrt{\frac{1}{\beta}} \left[u \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} - \frac{dv}{dr} \right]. \end{cases}$$

$$(B') \quad \frac{d}{dr} \lg u = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g_{11}}{\beta}} v.$$

Setzt man hiernach

$$v = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\beta}{g_{11}}} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dr}$$

in (B'') ein, so erhält man für u die Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{3} \sqrt{g_{11}} u R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} = \frac{d}{dr} \left\{ \left[u^2 \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} u \frac{d}{dr} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \right] : \frac{du}{dr} \right\} + u \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} \frac{d}{dr} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \\ (B''') \left\{ \left(\frac{\beta}{3} - 1 \right) \sqrt{g_{11}} u R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} = \frac{d}{dr} \left\{ \left[u^2 \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} u \frac{d}{dr} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \right] : \frac{du}{dr} + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} \frac{d}{dr} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \right\}. \end{aligned}$$

Ist diese Gleichung gelöst, so bestimme man v nach (B') und hieraus dann \mathfrak{A} und φ_0 aus den Gleichungen (A'''), wobei noch eine Quadratur auszuführen ist.¹⁾

Ich erhalte also wie Weyl²⁾ ein Problem 3. Ordnung, will mich aber hier nicht auf seine Lösung einlassen, sondern mich dem Falle zuwenden, daß alle elektrischen Größen verschwinden. Das ist zwar wegen des Bestehens der Gleichung (D') in der Natur genau nicht möglich, da die Konstante κ wegen der Gleichung (8) in VI, S. 126 von 0 verschieden sein muß, wenn man überhaupt die elektrischen Vektoren deuten will. Aber es wird doch angenähert zutreffen, wo die Gravitation überwiegt, wie in der Planetenbewegung.

IV. Die Gleichungen des elektrizitätsfreien Gravitationsfeldes.

Setzt man also sämtliche elektrischen Größen gleich 0, so hat wegen der Unbestimmtheit in den Differentialquotienten des Logarithmus einer verschwindenden Größe eine etwas abweichende Behandlung der Grundgleichungen Platz zu greifen.

1) Natürlich sind nun noch die übrigen Größen φ_1 , ε , \mathfrak{F} , \mathfrak{G} , g^2 und die Eichung aus ihren Gleichungen zu bestimmen.

2) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 59. S. 130. 1919.

In der 1. Feldgleichung (C') der Elektrizität war aus dem identischen Verschwinden der $\text{Div}_1 f$ gefolgert worden, daß

$$\varphi_1 = \frac{d}{dr} \lg \left[\mathfrak{F} + 2g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 \right]$$

sei. Natürlich hätte auch $\frac{d\varphi_0}{dr} = 0$ gesetzt werden können, um (C') zu genügen; dann wäre aber auch im allgemeinen Fall $\text{Div}_0 f = 0$ geworden, also ein Auftreten elektromagnetischer Vektoren unmöglich gemacht worden. Es ist also für den allgemeinen Fall die Lösung $\frac{d\varphi_0}{dr} = 0$ zu verwerfen und statt dessen wie geschehen,

$$\varphi_1 = \frac{d}{dr} \lg \left[\mathfrak{F} + 2g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 \right]$$

zu setzen. Dann kann ich dies aber auch in (A') einsetzen und erhalte so

$$(4) \quad -\mathfrak{F} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} + 2g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \varphi_1. \quad 1)$$

Um $-\mathfrak{F}$ zu eliminieren, addiere ich $-2g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2$, wodurch die linke Seite zu $\sqrt{g^{11}} \beta e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr}$ wird (vgl. E')²⁾:

$$(5) \quad -\sqrt{g^{11}} \beta e^{-\mathfrak{A}} \frac{d\varphi_0}{dr} = \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} - 2g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 + 2g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \varphi_1.$$

1) Vgl. VI. S. 116, Gl. (8).

2) Diese Gleichung (E') liefert daher im elektrizitätsfreien Falle die Beziehung $\mathfrak{F} + 2g^2 = 0$. Definiert man nun die Massendichte \mathfrak{d} , wie ich es VI, S. 117 Gl. 10) getan habe, durch $\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{F}}{8\pi\kappa}$, was in eben diesem Falle mit meiner früheren Gleichung $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{g}}{8\pi\kappa}$ (I, S. 163, Gl. (60)) zusammenfällt, so erhält man die Beziehung $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{g}^2}{4\pi\kappa}$ — wobei κ immer die Gravitationskonstante in Anlehnung an die Poissonsche Formel bedeutet —, d. h. die Folgerung, daß das Quadrat des Gravitationsvektors g der Massendichte \mathfrak{d} proportional ist. Die Größe $\frac{\mathfrak{g}^2}{4\pi\kappa}$ repräsentiert ja aber auch den von mir als kinetisch bezeichneten Teil der Energiedichte des Gravitationsfeldes (I, S. 171, Gl. 85); der sogenannte potentielle Teil fällt hier fort, da er nur auftritt, wenn eine zweite Masse sich im Felde der ersten befindet. Es wäre also die Massendichte der Energiedichte der Gravitation gleich, eine Folgerung, die recht viel für sich hat. Auch Mie vertritt diesen Gedanken, wenn er auch bei seiner Auffassung der

In einer elektrizitätsfreien Welt ($\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$; übrigens würde auch $\varphi_0 = c$, $\varphi_1 = 0$ genügen) wird man also auf die Gleichung geführt:

$$(6) \quad \frac{2}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} = 2g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2 \cdot {}^1)$$

Da man durch Division erhält:

$$\frac{d}{dr} \left[\lg \left(\sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right) \right] = \frac{d\mathfrak{A}}{dr},$$

kann man sofort einmal integrieren:

$$(7) \quad \sqrt{G} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} = c_1 \cdot e^{\mathfrak{A}}.$$

Die Integrationskonstante c_1 steht in enger Beziehung zur anziehenden Masse, die als Differentialquotient der Invariante

$$\iiint \sqrt{G} \mathfrak{d} \cdot dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

nach der Zeit dx^0 , d. h. durch

$$(8) \quad M = \iiint \sqrt{G} \mathfrak{d} \cdot dx^1 dx^2 dx^3$$

definiert werden kann. Für die Ruhmasse erhält man dann, da $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \vartheta$ ist:

$$M = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \mathfrak{d} \cdot dr.$$

Nun ist \mathfrak{d} (vgl. die Anmerkung auf der vorigen Seite) gleich $\frac{g^2}{4\pi x}$, d. h. $\frac{g^{11}}{4\pi x} \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right)^2$, also nach

$$(6) \quad \mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi x} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d}{dr} \sqrt{G} \cdot g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr},$$

Masse als eines Pseudotensors zu anderen, nämlich den Einsteinschen, Ergebnissen kommt. (Vgl. G. Mie, Die Einführung eines Koordinatensystems usw. Ann. d. Phys. 62. S. 68. 1920.) Würde man dagegen den Pseudotensor zum vollen Tensor, nämlich dem der Riemannschen Krümmung, ergänzen, wie es ja wohl im Sinne der ursprünglichen Materiedefinition Einsteins liegt, so werden die Folgerungen ganz anders.

1) Hierin besteht also eine Abweichung gegen meine bisherigen Arbeiten (I u. II), wo ich $\text{Div Grad } \mathfrak{A}$ im Außenraum 0, im Innern aber $\frac{3}{\varrho^2}$ setzte, d. h. die Dichte \mathfrak{d} , von dem Innenraum des Elektrons abgesehen, überall genau gleich 0 annahm.

es wird also

$$M = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} g^{11} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} \right|_{r_1} = \frac{1}{\pi} \left| \frac{c_1}{\sin \varphi} e^{\mathfrak{A}} \right|_{r_1}^{r_2} \quad \text{und} \\ (9) \quad c_1 = \pi M \sin \varphi : \left| e^{\mathfrak{A}} \right|_{r_1}^{r_2}.$$

Lassen sich zwei Radien r_1 und r_2 finden, daß für den ersteren \mathfrak{A} gleich $-\infty$, für den letzteren aber 0 wird, so ist

$$c_1 = \pi M \sin \varphi. \quad 1)$$

Die Gleichung (7) läßt sich nun nach den von uns gemachten Annahmen für G und g^{11} leicht weiter behandeln, wobei ich mich auf den Fall beschränken will, daß der Welt-radius R unendlich groß sei; für die anderen Fälle ist das Verfahren ähnlich. Ich setze also

$$g^{11} = 1 + \frac{b}{r} \quad (\text{Gl. 3a}),$$

daher

$$\sqrt{G} = e^{\mathfrak{A}} \left(1 + \frac{b}{r} \right)^{-1/2} r^2 \sin \varphi$$

und bekomme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 \sqrt{1 + \frac{b}{r}} \frac{d\mathfrak{A}}{dr} = c_1 \quad 2), \quad \mathfrak{A} = -\frac{2c_1}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{r}} - 1 \right) \\ = -\frac{c_1}{r} + \frac{b c_1}{4r^2} \dots, \quad \frac{1}{g_{00}} = e^{-2\mathfrak{A}} = 1 + \frac{2c_1}{r} - \frac{b c_1 - 4c_1^2}{2r^2} \dots, \end{array} \right.$$

wenn man annimmt, daß das Potential \mathfrak{A} für unendliches r verschwindet. Zum Vergleich will ich die Formeln anführen, die man erhält, wenn man, wie ich es früher getan hatte, die Dichte b gleich 0 setzt, während alle anderen Voraussetzungen dieselben bleiben. Dann fehlt offenbar in Gl. (7) der Faktor $e^{\mathfrak{A}}$ der rechten Seite, was zur Folge hat, daß in Gl. (10) $\mathfrak{A} + 1$ nun wieder durch $e^{\mathfrak{A}} (= \sqrt{g_{00}})$ ersetzt werden muß. Nimmt man außerdem $b = 0$ an, erhält man meine bisherigen Formeln (vgl. I und III), für $b = -2c_1$ dagegen die Einsteinschen.

Es wäre nun zu untersuchen, was sich aus der Gl. (10) für Wirkungen in der Krümmung des Lichtstrahls und der Vorrückung des Perihels ergeben. Hierzu ist es nötig, von

1) Der Faktor $\sin \varphi$ ist unwesentlich und nur der Genauigkeit halber beigelegt.

2) Unter Unterdrückung des unwesentlichen Faktors $\sin \varphi$.

der Gleichung der geodätischen Linie auszugehen, die für das L. E. Q.

$$ds^2 = g_{00} dx^{02} + g_{11} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\vartheta^2$$

lautet:

$$(11) \quad 1 = -B^2 g_{11} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 - B^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \frac{c_0^2}{g_{00}},$$

worin

$$B = -ir^2 \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{und} \quad c_0 = g_{00} \frac{dx^0}{ds}$$

die Integrationskonstanten in den sofort zu integrierenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung der geodätischen Linien für die Koordinaten x^0 und x^2 oder φ (bei der Annahme $dx^3 = 0$) bedeuten.¹⁾ Für den Lichtstrahl ist dann $ds = 0$, weshalb dann sowohl B^2 wie c_0^2 unendlich werden, aber so, daß ihr Quotient $\frac{c_0^2}{B^2} = m$ endlich bleibt. Daher erhält man aus (11) die Gleichung des Lichtstrahls:

$$(12) \quad 0 = -g_{11} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \left(\frac{m}{g_{00}} \right)$$

oder

$$(12a) \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 = \frac{m}{g_{00}} g^{11} - \left(\frac{1}{r} \right)^2 g^{11}.$$

Die Durchrechnung dieser Gleichung lehrt nun, daß es nur nötig ist, Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen, weshalb ich $\frac{1}{g_{00}}$ durch $1 + \frac{2c_1}{r}$, g^{11} durch $1 + \frac{b}{r}$ ersetze. Man erhält dann

$$\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 = m \left(1 + \frac{b + 2c_1}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{b}{r} \right),$$

also auf der rechten Seite einen Ausdruck 3. Grades, den ich in

$$- \left(\frac{b}{r} + k \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-\varepsilon)} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)} \right)$$

zerlege. In erster Annäherung ist dann zu erwarten, daß $k = 1$ wird, während a und ε reelle Halbachse und Exzentrif

1) Vgl. auch I, S. 176.

zität der Hyperbel bedeuten, die nach Keplers Gesetz der Lichtstrahl darstellt; denn die Gleichung (12) ist ja nur ein besonderer Fall der Planetenbahngleichung (11).¹⁾ Durch Koeffizientenvergleichung erhält man dann drei Beziehungen:

$$(I) \quad k - \frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)} = 1, \quad (II) \quad -\frac{2k}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{b}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -(b+2c_1)m,$$

$$(III) \quad \frac{k}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -m.$$

Aus I (und III) ergibt sich wieder sehr nahe (bis auf Glieder mindestens 2. Ordnung) $k = 1$, da b und a klein, ε groß von 1. Ordnung ist. Dividiert man nun II durch III, so erhält man

$$-2ak + b = bk + 2kc_1,$$

woraus wegen I wieder sehr nahe $-2a = 2c_1$ folgt. Bedeutet r_0 den kleinsten (oder größten) Abstand vom Zentrum, so ist $-a = \frac{r_0}{\varepsilon - 1}$, und man hat $\frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{c_1}{r_0}$. Wegen der Größe von ε kann man auch $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{c_1}{r_0}$ sagen. Zu derselben Gleichung wird man auch geführt, wenn man in III um eine Ordnung schärfer rechnet. Nun war

$$d\varphi = d\left(\frac{1}{r}\right) \left[\left(1 + \frac{b}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right) \left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r}\right) \right]^{-1/2}.$$

Ich setze hierin

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \psi}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\varepsilon \sin \psi d\psi}{a(1-\varepsilon^2)},$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon(1+\cos \psi)}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad \frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon(1-\cos \psi)}{a(1-\varepsilon^2)},$$

also

$$d\varphi = \mp \frac{\varepsilon \sin \psi d\psi}{a(1-\varepsilon^2)} \left[\left(1 + \frac{b(1+\varepsilon \cos \psi)}{a(1-\varepsilon^2)}\right) \frac{\varepsilon^2(1-\cos^2 \psi)}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} \right]^{-1/2}$$

$$= \mp d\psi \left(1 - \frac{b(1+\varepsilon \cos \psi)}{2a(1-\varepsilon^2)}\right),$$

$$\varphi = \mp \psi \left(1 - \frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)}\right) \pm \frac{\varepsilon b \sin \psi}{2a(1-\varepsilon^2)} = \mp \psi \left(1 - \frac{b}{2r_0(1+\varepsilon)}\right)$$

$$\pm \frac{\varepsilon b \sin \psi}{2r_0(1+\varepsilon)} = \mp \psi \pm \frac{b \sin \psi}{2r_0}.$$

1) Vgl. die Eddingtonsche Annahme, Naturwissenschaften VII. Heft 20, S. 368. 1919.

Läuft nun der Lichtstrahl von einer Unendlichkeit in die andere, so wird $\cos \psi$ sich von $-\frac{1}{\varepsilon}$ über 1 wieder bis $-\frac{1}{\varepsilon}$ ändern; es wächst also ψ von

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \text{ bis } +\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon},$$

$\sin \psi$ von -1 bis $+1$ und φ von

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{2r_0} \text{ bis } +\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{b}{2r_0}$$

(oder umgekehrt), ändert sich also um $\pi + \frac{2}{\varepsilon} - \frac{b}{r_0}$ oder, da $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{c_1}{r_0}$ war, um $\pi + \frac{2c_1 - b}{r_0}$. Die Abweichung des Lichtstrahls von der Geraden ist demnach durch den Wert $\frac{2c_1 - b}{r_0}$ gegeben. Setzt man hierin $b = 0$, so erhält man den von mir angegebenen Wert der Krümmung des Lichtstrahls¹⁾, für $b = -2c_1$ dagegen den Einsteinschen, der natürlich dann doppelt so groß wird.

Da sich die Berücksichtigung höherer Glieder als von der 1. Ordnung bei dieser Ableitung erübrigt, hat also die Annahme einer von 0 verschiedenen Dichte b im Weltraum keinen unmittelbaren Einfluß auf die Krümmung des Lichtstrahls. Es ist hierbei aber das zu beachten, was ich im nächsten Abschnitt dieser Arbeit zu diesem Punkte zu sagen habe.

Dagegen muß bei der Berechnung der Perihelwanderung um eine Ordnung genauer gerechnet und

$$\frac{1}{g_{01}} = 1 + \frac{2c_1}{r} - \frac{b c_1 - 4c_1^2}{2r^2}$$

nach (10) gesetzt werden. Aus (11) ergibt sich dann, wie (12a) aus (12):

$$(11a) \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 = \frac{g^{11}}{B^2} (c_0^2 - 1) - \frac{g^{11}}{r^2},$$

also

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 &= \frac{c_0^2 - 1}{B^2} + \frac{2c_1 c_0^2 + b(c_0^2 - 1)}{B^2} \cdot \frac{1}{r} \\ &\quad + \left(c_0^2 \cdot \frac{4c_1^2 + 3b c_1}{2B^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{b}{r^3}. \end{aligned}$$

1) Vgl. III. S. 23f.

Für die rechte Seite setze ich wieder wie früher

$$-\left(k + \frac{b}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1-\varepsilon)}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right)$$

und erhalte durch Koeffizientenvergleichung

$$(I) \quad k - \frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)} = 1 - c_0^2, \quad \frac{4c_1^2 + 3bc_1}{2B^2},$$

$$(II) \quad \frac{2k}{a(1-\varepsilon^2)} - \frac{b}{a^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{2c_1c_0^2 + b(c_0^2 - 1)}{B^2}, \quad (III) \quad \frac{-k}{a^2(1-\varepsilon^2)} = \frac{c_0^2 - 1}{B^2}.$$

Nun ist, wie ich das in (I) S. 160, Gl. (49)¹) gezeigt habe, die Flächenkonstante

$$B = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{cT} \quad \text{und} \quad c_1 = \kappa M = \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2};$$

also ergibt sich aus (III)

$$c_0^2 = 1 - \frac{4\pi^2 a^2 k}{c^2 T^2}.$$

Die Gleichung (II) bestätigt bei Unterdrückung der Glieder höherer Ordnung den Ansatz für c_1 , und (I) liefert dann den Wert von

$$k = 1 + \frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)} - \frac{c^2 T^2 - 4\pi^2 a^2 k}{8\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2} \cdot \left(\frac{16\pi^2 a^2}{c^2 T^2} + 3b\right).$$

Da $4\pi^2 a^2 k$ gegen $c^2 T^2$ verschwindet, bekommt man also

$$\begin{aligned} k &= 1 + \frac{2b}{a(1-\varepsilon^2)} - \frac{8\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} - \frac{3b}{2a(1-\varepsilon^2)} \\ &= 1 + \frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)} - \frac{8\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)}. \end{aligned}$$

Nun sei

$$b = -2c_1 \cdot \beta = -\frac{8\pi^2 a^2 \beta}{c^2 T^2},$$

also

$$k = 1 - \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)} (\beta + 2).$$

Aus Gleichung (11a) ergibt sich nun wieder

$$d\varphi = d\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \left[\left(k + \frac{b}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a(1+\varepsilon)}\right) \left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1/2}.$$

Hieraus aber folgt ähnlich wie bei der Lichtkurve, wenn

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \psi}{a(1-\varepsilon^2)}$$

ist:

$$\varphi = \mp \psi \left[k^{-1/2} - \frac{b}{2a(1-\varepsilon^2)} \right] \pm \frac{\varepsilon b \sin \psi}{2a(1-\varepsilon^2)}.$$

¹⁾ Das dortige A ist gleich $2B/c$; c ist die normale Lichtgeschwindigkeit, T die Umlaufzeit.

Von einem Perihel zum nächsten ändert sich ψ von $h \cdot 2\pi$ bis $(h+1) \cdot 2\pi$, also φ um

$$2\pi \left[h^{-1/2} - \frac{b}{2a(1-\epsilon^2)} \right],$$

d. h. um

$$\begin{aligned} 2\pi \left[1 + \frac{2\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\epsilon^2)} (\beta + 2) + \frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\epsilon^2)} \cdot \beta \right] \\ = 2\pi \left[1 + \frac{2\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\epsilon^2)} (3\beta + 2) \right], \end{aligned}$$

woraus dann eine Vorrückung der Sonnennähe um

$$\frac{4\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1-\epsilon^2)} \cdot (3\beta + 2)$$

folgt.

Im Falle des unverzerrten Ruhraumes, den ich für den einfachsten halte, wird $\beta = 0$; die Perihelwanderung sinkt also bei Berücksichtigung der Energiedichte der Gravitation von der bisher errechneten Hälfte des Einsteinwertes auf $1/3$. Bei Einsteins eigenem Ansatz für das L. E. Q. ist $\beta = 1$, und die Perihelvorrückung ergibt sich nun zu $5/6$.

Auch hier ist es interessant, die Ergebnisse mit denen zu vergleichen, die bei der Annahme der Dichte $\delta = 0$ herauskommen. Da nun nach Gl. (10)

$$e_{00} = \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{c_1}{r} + \frac{b c_1}{4 r^2} \dots,$$

also

$$\frac{1}{g_{00}} = 1 + \frac{2c_1}{r} + \frac{6c_1^2 - b c_1}{2r^2} \dots$$

wird, bleibt sonst alles dasselbe bis auf den Summanden 2, der in der Formel für die Perihelwanderung zu 3β hinzugefügt wird. Dieser muß dann durch eine 3 ersetzt werden, wodurch dann die schon bekannten Ergebnisse im Einsteinschen und in meinem Koordinatensystem sich wieder einstellen.

Ich will diesen Abschnitt nicht schließen, ohne zu bemerken, daß in dem von mir bevorzugten Ansatz des unverzerrten Ruhraumes, wenn also $b = \beta = 0$ wird, die Formel (10) für das Gravitationspotential genau den Wert

$$-\frac{c_1}{r} \quad \text{oder} \quad -\frac{\kappa M}{r},$$

d. h. den Newtonschen Ausdruck ohne jede Korrektion, liefert. Für andere Werte von b gilt dies nur in erster Näherung.

Insbesondere ergibt sich für negative b die Unmöglichkeit, bis ins Zentrum hineinzugehen, da für $r < -b$ die Quadratwurzel $\sqrt{1 + \frac{b}{r}}$ imaginär wird; für die Grenze, d. h. $r = -b$ nimmt dann das Potential \mathfrak{A} den Wert $\frac{2c_1}{b}$ und g_{00} den Wert $e^{\frac{4c_1}{b}}$ an (wobei zu beachten ist, daß b negativ ist), während g_{11} unendlich wird. Diese Überlegungen sind aber höchst problematischer Natur, da jedenfalls in so großer Nähe des Mittelpunktes die elektromagnetischen Größen nicht unberücksichtigt bleiben dürfen.

V. Der Einfluß des widerstehenden Mittels.

Es drängt sich aber hier die Frage auf, inwiefern die Erfüllung des gesamten Weltenraums mit Materie — bei der grundsätzlichen Gleichsetzung von Materie und Energie — von der Dichte der Gravitationsenergie nicht ebenfalls ihre Wirkungen in dem angegebenen Sinne auf die Krümmung des Lichtstrahls und die Veränderung der Planetenbahnen ausübt.

Was die erste angeht, so ist sie von der Annahme des Brechungsexponenten dieser Materie, d. h. von Dielektrizität ϵ und Permeabilität λ abhängig, kann also erst dann erfaßt werden, wenn man auch die elektromagnetischen Größen in den Kreis der Betrachtung zieht. Grundsätzlich ist aber zu bemerken, daß die Werte von ϵ und λ sich nirgends im ganzen Weltenraum genau konstant verhalten werden, also schon aus diesem Grunde eine Krümmung des Lichtstrahls erwartet werden muß, die weder Einstein noch ich noch sonst irgend jemand bisher erfaßt hat, so daß also in diesem Punkte nicht nur experimentelle, sondern auch theoretische Schwierigkeiten noch zu überwinden sind. Selbstverständlich ist anzunehmen, daß wegen der nach dem Mittelpunkte hin zunehmenden Dichte dieser Energiematerie die Krümmung des Lichtes im gleichen Sinne wie bei Einstein, Eddington und mir erfolgen muß. In diesem Zusammenhange möchte ich auf die Beobachtungen Courvoisiers¹⁾ hinweisen, die eine derartige Wirkung wahrscheinlich machen, wenn auch das von ihm

1) Vgl. hierzu: Guthnick, Neue Untersuchungen über die jährliche Refraktion, Naturwissenschaften VIII. Heft 26. 1920.

empirisch gefolgerte Gesetz gerade in der Nähe der Sonne zu versagen scheint, so daß es noch verbesserungsbedürftig ist. Immerhin scheint es mir auch aus diesem Grunde verfrüht, schon jetzt die Bestätigung irgendeiner Theorie durch die Erfahrung als sicher anzunehmen. Die Lichtstrahlkrümmung in der Nähe der Sonne scheint vielmehr sowohl in der Erfahrung wie in der Theorie eine recht verwickelt zusammengesetzte Wirkung zu sein, und wir fangen jetzt erst an, die Schwierigkeiten in ihrer Erfassung zu erkennen.

Günstiger dagegen scheint mir der Fall der Planetenbewegung für die Theorie zu liegen. Die Energiematerie von der Dichte

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\pi\kappa} g^{11} \left(\frac{d\mathfrak{H}}{dr} \right)^2$$

wird auf die in ihr sich bewegenden Planeten einen Widerstand ausüben. Ich setze diesen in Übereinstimmung mit der landläufigen Annahme proportional dem Quadrat v^2 der Geschwindigkeit, dem Querschnitt $\pi \varrho^2$ des Planeten und der Dichte \mathfrak{d} , die, wie bekannt, durch das Quadrat c^2 der Lichtgeschwindigkeit dividiert werden muß. Dann wird die auf einen Planeten von der Masse $\frac{4}{3}\pi \varrho^3 d$ ausgeübte Gegenkraft

$$\frac{v^2 \cdot \pi \varrho^2 \cdot \mathfrak{d}}{c^2} = \frac{v^2 \cdot \pi \varrho^2 \cdot \left(\frac{\kappa M}{r^2} \right)^2}{c^2 \cdot 4\pi\kappa} = \frac{v^2 \cdot \pi \varrho^2 \cdot \kappa M^2}{c^2 \cdot r^4 \cdot 4\pi},$$

d. h. er erfährt die Verzögerung

$$\frac{v^2 \cdot \pi \varrho^2 \cdot \kappa M^2}{c^2 \cdot r^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi \varrho^3 d} = \frac{v^2 \cdot \kappa M^2}{c^2 \cdot r^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{4}{3}\varrho d};$$

hierin kann nach dem 3. Keplerschen Gesetz $\kappa M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ gesetzt werden (a große Halbachse, T Umlaufszeit), wenn von der kleinen Abweichung von diesem Gesetz infolge des Einflusses der Planetenmasse abgesehen wird. So erhält man die Verzögerung

$$\frac{v^2 \cdot 3\pi M a^3}{c^2 r^4 \cdot 4 T^2 \varrho d}.$$

1) \mathfrak{d} ist hier nach der Annahme $g^{11} = 1$ ($b = 0$) angesetzt; für andere Fälle sind die Abweichungen gering.

Es wird zweckmäßig sein, sogleich durch die 3. Potenz des Parameters $p = a(1 - \varepsilon^2)$ der Bahnellipse zu dividieren; man bekommt dann

$$\frac{v^3 \cdot 3 \pi M}{c^3 r^4 \cdot 4 T^2 \rho d (1 - \varepsilon^2)^3}.$$

Hieraus geht hervor, daß die Wirkung ähnlich wie die relativistischen vom Quadrat $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ abhängt, ferner aber außer $\frac{v^2}{r^4}$ nur konstante Glieder enthält. Ich setze also die Verzögerung gleich $\frac{\alpha v^2}{r^4}$; dann ist

$$\frac{\alpha}{p^3} = \frac{3 \pi M}{4 c^2 T^2 \rho d \cdot (1 - \varepsilon^2)^3}.$$

Da sie in der Richtung der Geschwindigkeit wirkt, lauten die Grundgleichungen für die Planetenbewegung, wobei ich mich übrigens des klassischen Ansatzes bediene, um den Einfluß des widerstehenden Mittels rein zu erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{x M x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \frac{\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{(x^2 + y^2)^2} \frac{dx}{dt}; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{y M y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \frac{\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{(x^2 + y^2)^2} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Eine Integration dieser Gleichungen in geschlossener Gestalt ist nicht möglich; der Flächensatz liefert bei Einführung von Polarkoordinaten:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{x M p} e^{-\alpha \int r^{-4} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt}$$

und der Energiesatz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= - \frac{x M (1 - \varepsilon^2)}{p} + \frac{2 x M}{r} \\ &\quad - 2 \alpha \int r^{-4} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}^3 dt. \end{aligned}$$

Die Elimination von t ergibt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 &= \left[- \frac{x M (1 - \varepsilon^2)}{p} + \frac{2 x M}{r} - 2 \alpha \int r^{-4} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}^3 \right. \\ &\quad \left. - 2 \alpha \int r^{-4} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi \right] \frac{2 \alpha \int r^{-4} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi}{x M p} \cdot r^4. \end{aligned}$$

Ich vernachlässige von nun an stets die höheren Potenzen von α außer der ersten und erhalte für $1/r$:

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left[-\frac{1-\varepsilon^2}{p^2} + \frac{2}{pr} \right] e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} \\ - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi.$$

Nun sei

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} + u,$$

dann ist

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{1}{p} e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} \\ \cdot 2\alpha \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{du}{d\varphi},$$

also wegen der oben eingeführten Abkürzung

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{2}{p} \alpha \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{du}{d\varphi}$$

und

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{4}{p} \alpha \frac{du}{d\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}.$$

Dies setze man oben ein und erhält:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{4}{p} \alpha \frac{du}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} \\ - u^2 + \frac{1}{p^2} e^{4\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} \\ - \frac{1-\varepsilon^2}{p^2} e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} \\ - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi.$$

Jetzt setze ich weiter

$$u = -\cos \varphi'.$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} + \frac{1}{p^2} \left[e^{4\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} - e^{2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi} \right] - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi},$$

und unter Beobachtung obiger Abkürzungsmöglichkeit

$$u = -\cos \varphi'.$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} + \frac{\varepsilon^2 + 1}{p^2} \cdot 2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi}.$$

Da ε im Vergleich zu α/p^3 stets hinreichend groß sein wird, kann man hierfür setzen:

$$u = -\cos \varphi' \left[\frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon^2 + 1}{p\varepsilon} \alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi - \frac{\alpha p}{\varepsilon} \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi \right].$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} = \sin \varphi' \frac{d\varphi'}{d\varphi} & \left[\frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon^2 + 1}{p\varepsilon} \alpha \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi \right. \\ & \left. - \frac{\alpha p}{\varepsilon} \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} d\varphi \right] - \cos \varphi' \left[\frac{\varepsilon^2 + 1}{p\varepsilon} \alpha \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} - \frac{\alpha p}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Diese Größen sind in die Differentialgleichung einzusetzen, wobei wieder höhere Potenzen von α als die erste weggelassen werden:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi' \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} \right)^2 & \left[\frac{\epsilon^2}{p^2} + \frac{\epsilon^2 + 1}{p^2} \cdot 2\alpha \int \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} d\varphi \right. \\ & \quad \left. - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}^3 d\varphi \right] \\ & - 2 \sin \varphi' \cos \varphi' \frac{d\varphi'}{d\varphi} \left[\frac{\epsilon^2 + 1}{p^2} \alpha \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \right. \\ & \quad \left. - \alpha \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}^3 \right] \\ & = -\frac{4\epsilon}{p^2} \alpha \sin \varphi' \frac{d\varphi'}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \\ & + \sin^2 \varphi' \left[\frac{\epsilon^2}{p^2} + \frac{\epsilon^2 + 1}{p^2} \cdot 2\alpha \int \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} d\varphi \right. \\ & \quad \left. - 2\alpha \int \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}^3 d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Man dividiere durch $\sin^2 \varphi'$ und den Ausdruck in der ersten eckigen Klammer und kürze wie oben ab:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} \right)^2 & = 1 + \frac{2\alpha}{\sin \varphi'} \frac{d\varphi'}{d\varphi} \cdot \frac{p^2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{r} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \\ & \cdot \left\{ \left[\frac{\epsilon^2 + 1}{p^2} - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right] \cos \varphi' - \frac{2\epsilon}{p^2} \right\}. \end{aligned}$$

Da wir von höheren Potenzen von α absehen, können wir in den mit α behafteten Gliedern die Werte der Veränderlichen einsetzen, die sie für $\alpha = 0$ annehmen, d. h.

$$\varphi' = \varphi, \quad \frac{1}{r} = \frac{1 - \epsilon \cos \varphi}{p}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 = \frac{1 - 2\epsilon \cos \varphi + \epsilon^2}{p^2}$$

setzen; dann erhalten wir

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^2 = 1 + \frac{2\alpha}{\sin\varphi} \frac{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}}{p\varepsilon^2} \left[\frac{2\varepsilon\cos^2\varphi}{p^2} - \frac{2\varepsilon}{p^2}\right],$$

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\varphi}\right)^3 = 1 - \frac{4\alpha}{p^3\varepsilon} \sin\varphi (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2},$$

$$d\varphi' = d\varphi \left[1 - \frac{2\alpha}{p^3\varepsilon} \sin\varphi (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} \right],$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{2\alpha}{p^3\varepsilon} \int_0^\varphi \sin\varphi (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi,$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\alpha}{2p^3\varepsilon^2} \left[\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{3} \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^3 + \frac{2(1-\varepsilon^2)}{5} \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^5 \right. \\ \left. + \frac{1}{7} \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^7 - \frac{92}{105} \sqrt{1-\varepsilon^2}^7 \right].$$

Insgesamt erhält man daher die Lösung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} e^{\frac{2\alpha}{p^2} \int (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi} - \left[\frac{\varepsilon}{p} + \frac{2\alpha}{p^4} \int \cos\varphi \right. \\ \left. (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi \right] \\ \cdot \cos \left\{ \varphi - \frac{\alpha}{2p^3\varepsilon^2} \left[\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{3} \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^3 + \frac{2(1-\varepsilon^2)}{5} \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^5 + \frac{1}{7} \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}^7 - \frac{92}{105} \sqrt{1-\varepsilon^2}^7 \right] \right\},$$

oder $r = \frac{p'}{1-\varepsilon'\cos\varphi'}$ mit obigem Werte von φ' und

$$p' = p e^{-\frac{2\alpha}{p^2} \int (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi}$$

und

$$\varepsilon' = \left[\varepsilon + \frac{2\alpha}{p^3} \int \cos\varphi (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi \right] \\ \cdot e^{-\frac{2\alpha}{p^2} \int (1-\varepsilon\cos\varphi)^2 \sqrt{1-2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2} d\varphi}$$

und

$$\frac{\alpha}{p^3} = \frac{3\pi M}{4e^3 T^3 Q d \cdot (1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Es findet also keine Perihelwanderung, sondern nur eine äußerst geringfügige Abweichung der Apsidenlinie vom Brennpunkte statt, ferner aber, wie zu erwarten, eine mit der Zeit zunehmende Verengung der Bahn und auch eine ent-

sprechende Abnahme der Exzentrizität. (Die noch übrig bleibenden Integrale sind elliptische, die ihren Wert proportional der Zahl der Umläufe vermehren.) Die Wirkung ist nur klein; sie verhält sich zur Einsteinschen Perihelwanderung wie

$$2c^2 T^2 \frac{3\pi M}{\rho d \cdot (1 - \epsilon^2)^3} : c^2 T^2 \frac{24\pi^3 a^2}{(1 - \epsilon^2)} = M : 16\pi^2 a^2 \rho d \cdot (1 - \epsilon^2)^2.$$

An der Größe des Produktes $a^2 \rho d$ gegenüber der Sonnenmasse $\frac{4}{3} \pi P^3 D$ kann man die Geringfügigkeit der Wirkung ermessen. Immerhin ist die Neigung zur Verringerung der Exzentrizität bemerkenswert, da sie für alle Planeten erfolgen muß und im Laufe der ungezählten Jahrmlionen doch vielleicht zu dem jetzigen Zustand einen Beitrag geliefert hat.¹⁾

Zusammenfassung.

Durch eine Abänderung der Variationsbedingungen in der Weltfunktion gelange ich zur Aufstellung einer weiteren ebenfalls eich- und koordinateninvarianten Gleichung

$$(1) \quad (\mathcal{F} + 2g^2)^2 = \beta \sqrt{\dot{\mathcal{F}}^2 - (\dot{\mathcal{F}}^*)^2}$$

zwischen den Größen des Gravitations- und elektromagnetischen Feldes.

Es werden dann die Bedingungen untersucht, unter denen sich die Annahme einer Verzerrung des Ruhraumes der anziehenden Elektronen sich mit der Theorie des skalaren Gravitationspotentials verträgt, wenn man dies als Lichtgeschwindigkeit deutet, und insbesondere der Einstein-Schwarzschildsche Ansatz für das Koordinatensystem im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld als mit dieser Theorie vereinbar gefunden.

1) Soeben nach Fertigstellung dieser Arbeit bekam ich den Artikel von E. Freundlich: „Der Bericht der englischen Sonnenfinsternisexpedition über die Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfeld der Sonne“ in den Naturwissenschaften VIII. Heft 34. S. 667ff. 1920 zu Gesicht, der sich insbesondere auch mit der von Courvoisier entdeckten jährlichen Refraktion beschäftigt. Auch nach Kenntnisnahme dieser Abhandlung kann ich leider nicht sagen, daß wir einer Deutung dieser Erscheinung näher gekommen sind.

Es wird sodann für das Feld eines einzigen Elektrons eine Diff.-Gl. 3. O.

$$(B''') \left\{ \begin{aligned} & \left(\left(\frac{\beta}{3} - 1 \right) \sqrt{g_{11}} \cdot R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} \right. \\ & - \frac{d}{dr} \left\{ \left[u^2 \sqrt{g_{11}} R^{-2} \sin^{-2} \frac{r}{R} + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} u \frac{d}{dr} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \right] : \frac{du}{dr} \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \sqrt{\beta} \frac{\frac{du}{dr}}{u \sqrt{g_{11}}} \right\} \right\} \end{aligned} \right.$$

gewonnen, aus der sich sämtliche Größen dieses Feldes, zum Teil durch Quadraturen, ableiten lassen.

Für die zwar nicht genau, aber im Fall der Planetenbewegung mit sehr großer Annäherung erfüllte Annahme, daß das elektromagnetische Feld verschwindet, wird das Problem sehr viel einfacher und führt zu der Folgerung, daß die Massendichte mit der der Gravitationsenergie übereinstimmt. Daraus werden die Ansätze für das Koordinatensystem im kugelsymmetrischen Gravitationsfelde abgeleitet, die mit den früheren Ansätzen von Einstein und von mir in Gliedern zweiter und höherer Ordnung abweichen, da diese die Massendichte im Felde gleich 0 setzten.

Es werden dann die sich daraus ergebenden Folgerungen für die Krümmung des Lichtstrahls und die Wanderung des Perihels untersucht. Nur im zweiten Fall wird eine Abweichung festgestellt, und zwar sinkt der Wert der Perihelwanderung für den Einsteinschen Ansatz auf $\frac{5}{6}$, für den meinigen von der Hälfte des Einsteinwertes auf $\frac{1}{3}$. Es wird dann noch geprüft, inwiefern die Annahme einer den Weltenraum erfüllenden Materie von der Dichte der Gravitationsenergie eine Hemmung auf den Planetenlauf ausübt und die Wirkung als sehr gering erkannt. Dagegen läßt sich noch nicht absehen, welchen Einfluß diese Energiematerie auf die Krümmung des Lichtstrahls ausübt, da hierzu die elektromagnetischen Größen eingeführt werden müssen, und ob insbesondere die jährliche Refraktion Courvoisiers hiermit zusammenhängt.

Wilhelmshaven, den 7. September 1920.

(Eingegangen 10. September 1920.)

2. Über die Wirbelströme bei der spontanen Änderung der Magnetisierung; von B. Wwedensky.

Beim Studium sämtlicher Prozesse, in denen ein Ferromagnetikum, z. B. Eisen, der Wirkung eines periodisch bzw. aperiodisch veränderlichen magnetischen Feldes unterworfen wird, hat man es unbedingt mit der Wirkung der Wirbelströme zu tun, die sich im Eisen entfalten und die die Schnelligkeit seines Ummagnetisierens zu mindern suchen. Wenn auch Wirbelströme bei *periodischen* Vorgängen schon vielseitig, wie experimentell, so auch theoretisch, untersucht worden sind, so fehlt doch eine Theorie der *aperiodischen* Prozesse gänzlich, für den Fall wenigstens, wenn die untersuchten Eisenproben kreiszylindrische Drähte sind. Doch spielen solche Prozesse eine wichtige Rolle, wo es sich um experimentelle Bestimmung der sogenannten magnetischen Viskosität (auch Nachwirkung genannt) handelt.¹⁾

Im folgenden wird eine Theorie der Wirbelströme in einem kreisrunden Eisenzyylinder, dessen Magnetisierung sich aperiodisch ändert, entwickelt. Die Resultate, die mit der

1) Hier sind besonders diejenigen Arbeiten gemeint, die sich mit der Verzögerung der spontanen Änderung der Magnetisierung in ihrem Anfangsstadium beschäftigen (Untersuchungen von J. Klemenčič, Wied. Ann. **62**, S. 68. 1897 und M. Gildemeister, Ann. d. Phys. **23**, S. 401. 1907). Man könnte die Ursache dieser Erscheinung nach Vorschlag von W. Arkadiew als „magnetische Viskosität“ bezeichnen. Dagegen schlägt er vor, unter der „magnetischen Nachwirkung“ derartige Änderungen des Magnetismus zu nennen, die sich in kleinen nachbleibenden Änderungen der Magnetisierung äußern (Untersuchungen von J. A. Ewing, Phil. Trans. **176**, S. 589. 1885; Lord Rayleigh, Phil. Mag. **23**, S. 225. 1887 u. a.). Da die ersten Vorgänge gewöhnlich sehr schnell verlaufen (etwa 10^{-6} Sek.), die letzteren dagegen viel langsamer (volle Sekunden, sogar Minuten), so findet die Viskosität bei sehr schnellen Vorgängen statt, die Nachwirkung aber nur bei sehr langsamen.

Erfahrung befriedigend stimmen, könnten wohl eine allgemeinere Anwendung finden, z. B. bei der Konstruktion schnellarbeitender Elektromagnete mit massiven oder unterteilten Kernen; auch sind die Ausgangsgleichungen dieselben, wie sie in der Theorie der Wärmeleitung, Diffusion u. a. Anwendung finden.¹⁾

Bezeichnungen.

H_z und B_z = Feldintensität und Induktion in der Entfernung z von der Zylinderachse.

H_0 und B_0 = Anfangswerte dieser Größen (für $t = 0$).

$$\Phi_z = \int_0^z 2\pi z \cdot B_z \cdot dz.$$

$$N_z = \int_0^z 2\pi z \cdot H_z \cdot dz.$$

σ = elektrische Leitfähigkeit (elektromagnetische CGS.-Einheiten).

μ = Permeabilität.

j_z = Wirbelstromdichte in der Entfernung z von der Zylinderachse.

t = Zeit.

$$a = 4\pi\mu\sigma.$$

r = Halbmesser eines unendlichen Zylinders oder Ringes.

$$\eta_z = \frac{t}{ar^2} = \frac{t}{4\pi\mu\sigma r^2}.$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_0'(x)$ und $J_1'(x)$ = Besselsche Funktionen vom Argumente x erster Art von Ordnung Null und Eins und ihre Derivierten nach x .

1. Es werde ein runder Eisenzylinder vom Radius r der Wirkung eines longitudinal gerichteten magnetischen Feldes H unterworfen, das für $t < 0$ eine konstante Intensität H_0 besitzt, bei $t = 0$ aber diese Intensität *sprungweise* ändert; also z. B. augenblicklich die Intensität Null bekommt. Dann ist für alle Momente $t > 0$ im Eisen bloß das Feld H_z wirksam, das von Wirbelströmen bedingt ist und dessen Intensität für gegebenes t bloß von der Entfernung z von der Zylinderachse abhängt. Dann gelten bekanntlich²⁾ die Beziehungen:

1) Vgl. Fourier, *Theorie anal. de la chaleur*; auch der Artike von E. W. Hobson und H. Diesselhorst in *Teubners Enz. math. Wiss.* 5. Nr. 4.

2) J. Zenneck, *Ann. d. Phys.* 9. S. 497. 1902.

$$(1) \quad H_e = 4\pi \int_0^r j_o d\varrho,$$

$$(2) \quad j_e = -\frac{\sigma}{4\pi\varrho} \cdot \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = -\frac{\sigma}{4\pi\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^e 2\pi\varrho \cdot B_e \cdot d\varrho.$$

Nach zweifacher Differenzierung nach ϱ bekommt man daraus die Differentialgleichungen, die als Spezialisierung der Maxwell'schen aufgefaßt werden können:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 H_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial H_e}{\partial \varrho} = 4\pi\varrho \frac{\partial}{\partial t} B_e,$$

$$(4) \quad -\frac{\partial^2 j_e}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial j_e}{\partial \varrho} + \frac{j_e}{\varrho^2} = \sigma \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varrho} B_e,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^3 N}{\partial \varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 N}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial N}{\partial \varrho} = 4\pi\sigma \frac{\partial^3}{\partial \varrho \partial t} \Phi_o.$$

Diese Gleichungen haben eine allgemeine Bedeutung; doch selbst bei der Kenntnis der Funktion $B = B(H)$ sind sie nur schwerlich zu behandeln. Wenn wir aber uns mit den Prozessen im oberen Teile der Hysteresisschleife begnügen, wo man, unter B_e bloß den verschwindenden Teil der sämtlichen Induktion verstanden, setzen kann¹⁾

$$B_e = \mu \cdot H_e; \mu = \text{const},$$

so vereinfachen sich unsere Gleichungen zu:

$$(3') \quad \frac{\partial^2 B_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial B_e}{\partial \varrho} = a \frac{\partial}{\partial t} B_e.$$

$$(4') \quad \frac{\partial^2 j_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial j_e}{\partial \varrho} - \frac{j_e}{\varrho^2} = a \frac{\partial}{\partial t} j_e.$$

$$(5') \quad \frac{\partial^3 \Phi_e}{\partial \varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \varrho} = a \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varrho} \Phi_e.$$

Zenneck²⁾, der die Gleichung (3') zum erstenmal auf diesem Gebiete angewandt hat, hat auch ihre Lösung für den periodischen Fall ermittelt; wir wollen hier eine Lösung finden, die sich auf den Fall der spontanen Magnetisierungsänderung bezieht.

1) Vgl. W. Luthé, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. S. 458. 1913.

2) A. a. O.

2. Betrachten wir also zuerst die Gleichung (3'). Für den aperiodischen Vorgang lautet das partikuläre Integral dieser Gleichung:

$$(B_\varrho)_1 = A \cdot e^{-\frac{a^2}{a} t} \cdot J_0(a \varrho),$$

wo A und a^2 vorläufig noch unbestimmte Konstanten sind ($a^2 > 0$). Das vollständige Integral wird durch die Reihe gegeben:

$$(6) \quad B_\varrho = \sum_{r=1}^{r=\infty} A_r \cdot e^{-\frac{a_r^2}{a} t} J_0(a_r \varrho).$$

Nun haben wir A_r und a_r^2 so zu wählen, daß die Grenzbedingungen erfüllt werden:

1. Für $t = 0$ ist $B_\varrho = B_0$ überall bei $0 \leq \varrho \leq r$.
2. Für $t > 0$ ist $B_\varrho = 0$ für $\varrho = r$.

Wir setzen, wie es aus der Theorie der Besselschen Funktionen folgt:¹⁾

$$1. \quad a_r r = \lambda_r,$$

wobei λ_r die r -te Wurzel der Gleichung $J_0(\lambda) = 0$ bedeutet, und

$$2. \quad A_r = \frac{2 \int_0^r B_0 J_0\left(\lambda_r \frac{\varrho}{r}\right) \varrho d\varrho}{r^2 J'(\lambda_r)^2} = \frac{2 B_0}{\lambda_r J_1(\lambda_r)}.$$

Setzt man diese Werte von a_r und A_r in (6), so bekommt man für B_ϱ die Formel:

$$(7) \quad \frac{B_\varrho}{B_0} = \beta_\varrho = 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-\lambda_r^2 \xi} \frac{J_0\left(\lambda_r \frac{\varrho}{r}\right)}{\lambda_r J_1(\lambda_r)},$$

wobei

$$\xi = \frac{t}{4 \pi \mu \sigma r^2}$$

gesetzt ist, und der ganze Ausdruck die Anfangs- und Grenzbedingungen erfüllt.

Wie man sieht, kommt die Veränderliche ϱ in dieser Formel nur in der Verbindung $\varrho/r = x$ vor, so daß man schreiben könnte $\beta_\varrho = \beta_x$; $x = \varrho/r$.

1) Z. B. A. Gray und G. Matthews, Treatise on Bessel Functions, Kap. VI.

Die Größen β_x und ξ spielen nun die Rolle der „reduzierten“ Koordinaten; die Größe x können wir dabei als Parameter betrachten. Setzen wir in (7) für λ_r und $J_1(\lambda_r)$ ihre Zahlenwerte¹⁾ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\beta_x = & 1,60 \cdot e^{-5,78 \xi} J_0\left(2,40 \frac{\varrho}{r}\right) - 1,07 \cdot e^{-30,47 \xi} \cdot J_0\left(5,52 \frac{\varrho}{r}\right) \\ & + 0,85 \cdot e^{-74 \xi} J_0\left(8,65 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) - 0,73 \cdot e^{-139 \xi} J_0\left(11,79 \frac{\varrho}{r}\right) \\ & + 0,65 \cdot e^{-229 \xi} J_0\left(14,93 \frac{\varrho}{r}\right) - 0,58 \cdot e^{-326 \xi} J_0\left(18,07 \frac{\varrho}{r}\right) \dots\end{aligned}$$

eine Reihe, die freilich nur bei nicht allzu kleinen ξ ($\xi \geq 0,01$) hinlänglich rasch konvergiert. Fig. 1 stellt eine Kurvenschar dar, die die Verteilung von β_x im Zylinder für verschiedene ξ

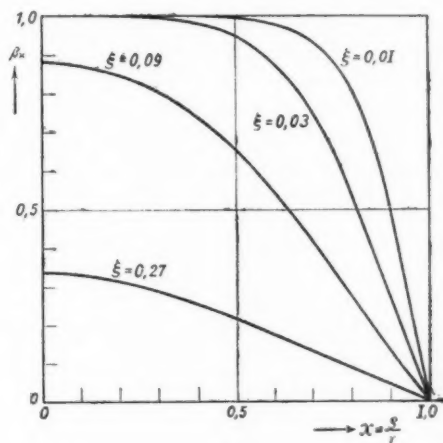


Fig. 1.

(also z. B. verschiedene Momente) ergibt. Das Diagramm ist mit Hilfe der Tab. I aufgezeichnet, bei deren Ermittlung Jahnke-Emdesche¹⁾ und Grunersche²⁾ Tabellen gebraucht wurden.

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln.

2) P. Gruner, Jahrb. d. Radioakt. 3. S. 120. 1906.

Tabelle I.

Werte für $\beta_e(\xi)$.

$\xi \backslash \varrho/r$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
0,01	1,0	1,0	1,0	0,98	0,81	0,49	0
0,03	1,00	1,00	0,977	0,866	0,534	0,280	0
0,09	0,885	0,850	0,737	0,541	0,279	0,137	0
0,27	0,337	0,318	0,263	0,183	0,090	0,044	0
0,81	0,0149	0,0140	0,0116	0,0081	0,0040	0,0019	0

Der Entmagnetisierungsprozeß beginnt an der Oberfläche des Zylinders und verbreitet sich allmählich in sein Inneres. Je dicker der Zylinder, je größer seine Permeabilität und seine Leitfähigkeit, desto länger ist die Dauer des Prozesses, analog dem Fall der Wärmeleitung oder der Diffusion.

4. Wenden wir uns jetzt zu der Bestimmung des Verlaufs und der Verteilung der Wirbelströme. Es ist leicht einzusehen, daß der Gleichung (4') der Ausdruck

$$(8) \quad j_e = \Sigma A_1 e^{-a^2 t} J_1(a \varrho)$$

genügt. Um die willkürlichen Konstanten A_1 und a zu bestimmen, betrachten wir den Ausdruck:

$$(8') \quad j_e = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_e}{\partial \varrho} = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial B_e}{\partial \varrho},$$

der unmittelbar aus (1) folgt. Setzen wir hier die Reihe B_e aus (7) ein, so erhalten wir:

$$(8'') \quad j_e = \frac{B_0}{4\pi\mu r} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda_v^2 \xi} \frac{J_1\left(\lambda_v \frac{\varrho}{r}\right)}{J_1(\lambda_v)},$$

wobei ξ und λ_v die vorige Bedeutung haben. Da dieser Ausdruck bis auf die beiden willkürlichen Konstanten mit (8) identisch ist, genügt er auch der Gleichung (4'), was die Richtigkeit der bei Bildung von (8'') angewandten Differentiation der unendlichen Reihe *a posteriori* beweist.

Mit anderen Worten, der Ausdruck (8'') stellt wirklich den gesuchten Verlauf und die Verteilung der Wirbelstromdichte dar. Die Zahlenformel lautet nun:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu r}{B_0} j_z = & 1,93 \cdot e^{-5,78\xi} J_1\left(2,40 \frac{\varrho}{r}\right) - 2,94 \cdot e^{-30,47\xi} J_1\left(5,52 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) \\ & + 3,68 \cdot e^{-74,88\xi} J_1\left(8,65 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) - 4,30 \cdot e^{-139\xi} J_1\left(11,79 \cdot \frac{\varrho}{r}\right) \\ & + 4,84 \cdot e^{-223\xi} J_1\left(14,93 \frac{\varrho}{r}\right) - 5,32 \cdot e^{-326\xi} J_1\left(18,07 \frac{\varrho}{r}\right) + \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel wurde die Tab. II zusammengestellt.

Tabelle II.

Verteilung der Funktion $\frac{4\pi\mu r}{B_0} j_z$ für verschiedene ξ .

$\xi \backslash \varrho/r$	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	0	0,0	0,0	0,0	0,32	0,72	1,29	2,54
0,03	0	0,016	0,106	0,499	0,828	1,16	1,37	1,37
0,09	0	0,161	0,385	0,584	0,662	0,704	0,704	0,660
0,27	0	0,095	0,173	0,221	0,234	0,235	0,227	0,210
0,81	0	0,004	0,008	0,010	0,011	0,011	0,011	0,005

Wie aus der Fig. 2 ersichtlich ist, ist anfangs der ganze Wirbelstrom an der Oberfläche des Zylinders kondensiert, und für $t = 0$ ist $j_z = r$ theoretisch unendlich groß.¹⁾ Allmählich dringt der Strom auch in das Innere des Zylinders ein, wobei aber das Dichtemaximum *nicht* immer an der Oberfläche liegt.

5. Die beiden Größen B_z und j_z entgehen der experimentellen Untersuchung. Das, was wir messen können, ist ausschließlich nur die Größe Φ_r — der Induktionsfluß im ganzen Zylinder. Die Gleichung (5') hat das Integral von der Form:

$$(9) \quad \Phi_z = \varrho r \sum A_2 e^{-\alpha^2 \xi} J_1(\alpha \varrho).$$

Wenn wir nun, analog wie oben, den Ausdruck gebrauchen

$$(9') \quad \Phi_z = \int_0^{\varrho} B_z \cdot 2\pi \varrho \cdot d\varrho,$$

so erhalten wir:

1) Praktisch ist das selbstverständlich nicht der Fall, erstens, weil das äußere Feld nicht momentan verschwindet und zweitens, weil das Eisen die magnetische Viskosität besitzt.

$$(10) \quad \Phi_g = 4\pi B_0 r g \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda_v^2 \xi} \approx \frac{J_1\left(\lambda_v \frac{g}{r}\right)}{\lambda_v^3 J_1(\lambda_v)},$$

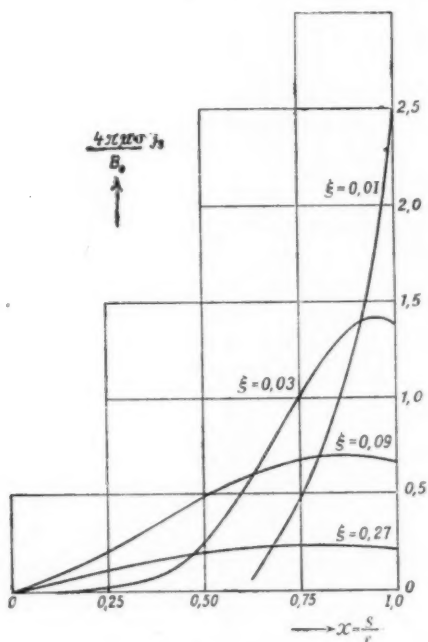


Fig. 2.

welcher Ausdruck der Gleichung (5') genügt. Setzen wir nun $g = r$ und führen die Größe

$$\varphi = \frac{\Phi_r}{\pi r^2 B_0},$$

die „reduzierte mittlere Induktion“ ein, so erhalten wir:

$$(11) \quad \varphi = 4 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_v^2 \xi}}{\lambda_v^3},$$

wobei also φ eine Funktion einer einzigen Variablen ξ ist. Die dazu bezügliche Zahlenformel lautet:

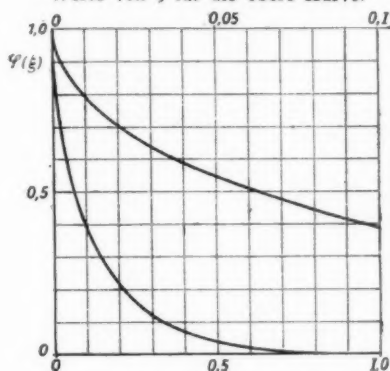
$$\varphi = 0,69167 \cdot e^{-5,783\xi} + 0,13120 \cdot e^{-30,472\xi} + 0,05346 \cdot e^{-74,83\xi} + \\ + 0,02773 \cdot e^{-139\xi} + 0,01794 \cdot e^{-228\xi} + 0,0122 \cdot e^{-326\xi} + \dots$$

Die Reihe konvergiert ziemlich rasch (besonders bei nicht allzu kleinen ξ) und ist für die Rechnungen gut geeignet. Die Tab. III stellt die daraus berechneten Werte von φ dar.

Tabelle III.
Die reduzierte mittlere Induktion $\varphi(\xi)$.

ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$	ξ	$\varphi(\xi)$
0,01	0,7841	0,10	0,3855	0,40	0,0685
0,02	0,7016	0,15	0,2920	0,45	0,0513
0,03	0,6405	0,20	0,2180	0,50	0,0384
0,04	0,5905	0,25	0,1631	0,60	0,0216
0,06	0,5105	0,30	0,1221	0,70	0,0121
0,08	0,4473	0,35	0,0893	0,80	0,0068
				1,00	0,0021

Werte von ξ für die obere Kurve.



Werte von ξ für die untere Kurve.

Fig. 3.

Mit Hilfe dieser Tabelle und besonders mit Hilfe der Fig. 3 wird es nun leicht, den Bruchteil des Anfangswertes der mittleren temporären Induktion zu bestimmen, die nach Verlauf von t Sekunden im Zylinder von beliebiger Dicke, Leitfähigkeit und Permeabilität noch besteht.

6. Die hier für den Fall des verschwindenden Feldes abgeleiteten Gleichungen (7), (8'') und (11) können wir nun leicht

auch für den Fall eines spontan entstehenden Feldes gebrauchen, indem wir den in diesem Falle gültigen Bedingungen, nämlich

$$1. \text{ für } t = 0: B_\varrho = 0 \quad \text{für } 0 \leq \varrho < r,$$

$$B_\varrho = \text{const für } \varrho = r,$$

$$2. \text{ für } t = \infty: B_\varrho = \text{const für } 0 \leq \varrho \leq r,$$

gemäß, die Gleichungen folgendermaßen umgestalten: statt Gleichung (7):

$$(7') \quad \beta_\varrho = 1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda_v^2 \xi} \frac{J_0\left(\lambda_v \frac{\varrho}{r}\right)}{\lambda_v J_1(\lambda_v)};$$

statt Gleichung (8''):

$$(8''') \quad j_\varrho = - \frac{B_0}{4\pi \mu r} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda_v^2 \xi} \frac{J_1\left(\lambda_v \frac{\varrho}{r}\right)}{J_1(\lambda_v)}$$

und endlich statt Gleichung (11):

$$(11') \quad q = 1 - 4 \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\lambda_v^2 \xi} \frac{1}{\lambda_v^2}.$$

Wie dieser Umgestaltung entsprechend die Tabellen und die Kurven zu ändern sind, ist ohne weiteres klar.

7. *Vergleich mit der Erfahrung.* Hopkinson und Wilson,¹⁾ die den Verlauf der Magnetisierungsänderung in sehr dicken (bis etwa 10 cm) Eisenzylindern maßen, haben gefunden, daß die Änderungszeiten *ceteris paribus* der Querschnittsfläche des Zylinders proportional sind. In der Tat, gesetzt, daß wir die Zeit θ messen, die dazu erforderlich ist, daß die Induktion bis auf den κ -ten Teil ihres Anfangswertes sinkt, oder, anders ausgedrückt, daß $\varphi(\xi)$ gleich $1/\kappa$ wird, so erhalten wir, daß die Größe ξ , die ja hier nur von dem Werte $1/\kappa$ abhängt, der Gleichung genügt:

$$\xi_{1/\kappa} = \frac{1}{4\pi \mu \sigma} \cdot \frac{\theta_{1/\kappa}}{(\pi r^2)},$$

oder daß $\theta_{1/\kappa}$ wirklich dem Zylinderquerschnitt proportional sein muß.

Klemenčič²⁾ und Gildemeister³⁾, die die Viskosität in Eisendrähten maßen, geben den Verlauf der Änderung

1) J. Hopkinson und E. Wilson, Proc. Roy. Soc. London 56, S. 108. 1894.

2) J. Klemenčič, a. a. O.

3) M. Gildemeister, a. a. O.

der temporären Induktion (im willkürlichen Maße) als Funktion der Zeit an. Um ihre Zahlen zur Prüfung unserer Formel gebrauchen zu können, bedürfen wir nun der Kenntnis der beiden Größen σ und μ , wofür uns genaue Angaben gänzlich fehlen, zumal da die „Permeabilität μ “ vermutlich keineswegs mit der „gewöhnlichen Permeabilität“ übereinstimmt: erstens, weil wir uns bei den in Rede stehenden Beobachtungen auf demjenigen oberen Teile der Hysteresisschleife befinden, der der Änderung des temporären Magnetismus entspricht, und zweitens, weil bei der äußersten Schnelligkeit, mit welcher die Prozesse verlaufen, die statischen Werte der Permeabilität ihre Gültigkeit verlieren können. Von vornherein könnte man mit guten Gründen behaupten, daß unsere Größe μ entschieden kleiner als die „gewöhnliche Permeabilität“ zu schätzen ist. Wir können also nicht umhin, daß wir die Größe μ als gewissermaßen willkürliche Konstante der Formel (11) betrachten und sie so wählen, daß die Erfahrung mit der Formel möglichst gut übereinstimmt. Dabei ergeben sich für mittlere Werte μ sehr plausible Zahlen, nämlich etwa 400, 200 und 100, was aus der folgenden Tabelle zu sehen ist.

Tabelle IV.
Die mittleren Werte der Permeabilität.

Drahtstärke mm	6,0	1,74	0,50	0,36	0,185	0,161
Maximale Feldstärke, Gauss	0,047	5,1	10	8,3	ca. 1	10
Permeabilität μ	(470)	145	116	180	(178)	360
Produkt $\mu\sigma$ (el.-magn.) . . .	0,047	—	—	—	0,0178	—

Haben wir nun auf irgendwelche Weise μ (wenn die Angaben über σ fehlen, auch das ganze Produkt $\mu\sigma$) geschätzt, so können wir jede experimentelle Kurve zur „reduzierten“ Form $\varphi(\xi)$ bringen. Der Grad der Übereinstimmung einer solchen Kurve mit der nach Gleichung (11) konstruierten, kann nun als Maß der Richtigkeit unserer Schlüsse dienen. Fig. 4 faßt in einem Diagramm sechs experimentelle Kurven zusammen, von denen vier einer noch nicht veröffentlichten Arbeit des Verfassers entnommen sind. Wie man sieht, schmiegen im allgemeinen die Beobachtungspunkte der theoretischen Kurve befriedigend an, was auch die Gültigkeit der abgeleiteten Formel zu beweisen scheint.

Die Übereinstimmung hört erst auf, wenn die Drähte

dünnere als 0,1 mm geworden sind. In der Tat stellt sich dabei eine Verzögerung des Prozesses ein, die zu groß ist, als daß sie der Wirkung der Wirbelströme zugeschrieben werden könnte; die Induktion fällt nämlich bis zur Hälfte ihres Anfangswertes in etwa 10^{-6} Sek. ab, während nach der Theorie sie dazu bloß 10^{-7} Sek. gebrauchen müßte. Ferner ist diese Verzögerung

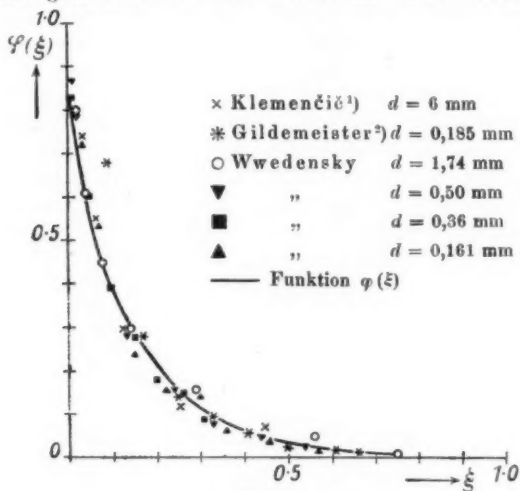


Fig. 4.

ceteris paribus um so bedeutender, je größer der Anfangswert der Magnetisierung ist. Der Grund der Verzögerung ist die magnetische Viskosität, die den Verlauf der spontanen Änderung der Magnetisierung in ihren Anfangsstadien regelt, und die mir vor kurzem (1918) experimentell vielseitig zu untersuchen gelungen ist. Ich beabsichtige darüber in möglichst kurzer Zeit zu sprechen.

Ich möchte nun auch an dieser Stelle dem Hrn. Prof. W. Arkadijew für die Anregung und Unterstützung bei der Erfüllung der Arbeit meinen verbindlichsten Dank aussagen.

Moskau, August 1919.

1) A. a. O., Mittel aus den Versuchsreihen.

2) A. a. O., Versuch *h* (korrigiert auf den „Leerspiralenausschlag“).

(Eingegangen 18. August 1920.)

3. **Über die reversible magnetische Permeabilität.**
Bemerkung
zu einer Arbeit des Herrn Fritz Erhardt;
von Richard Gans.

Herr Erhardt hat in seiner Königsberger Dissertation¹⁾ die Abhängigkeit der reversiblen Permeabilität von der Schwingungszahl studiert und bei dieser Gelegenheit eine Abweichung von den Ergebnissen meiner Messungen²⁾ gefunden. Hätte er Recht, so würde der von mir aufgestellte Satz, daß die reversible Permeabilität μ_r in großer Näherung eine eindeutige, von der Vorgeschichte unabhängige Funktion der Magneti-



Fig. 1.

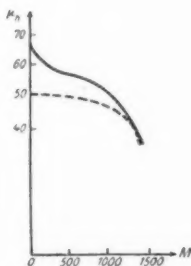


Fig. 2.

sierung \mathcal{M} ist, nicht gültig sein. Deshalb sei es mir erlaubt, auf diesen Punkt kurz zurückzukommen. Daß ich es erst heute tue, hat seinen Grund darin, daß ich die Annalen der Physik der letzten Jahre erst kürzlich erhalten habe.

Während ich früher Kurven des Typus der Fig. 1 erhalten habe, entsprechen die Resultate des Hrn. Erhardt der Kurve Fig. 2, d. h. die reversible Permeabilität auf der Nullpunkts-

1) Fritz Erhardt, Ann. d. Phys. **54**, S. 41, 1918; vgl. auch W. Kaufmann, Physik. Zeitschr. **17**, S. 552, 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **33**, S. 1065, 1910.

kurve verhält sich nach ihm ganz anders. Sie beginnt mit einem hohen Anfangswerte und nimmt bis zur höchsten Magnetisierung ständig ab. Erhardt glaubt, die Abweichung durch unvollkommene Entmagnetisierung meiner Eisenzyylinder (muß heißen: Ellipsoide) erklären zu können.

Trotzdem ich auf Grund meines Beobachtungsmaterials überzeugt war, ihm nicht beistimmen zu können, zumal ich bei meinen neueren Untersuchungen¹⁾, die ihm allerdings nicht bekannt sein konnten, nach einer wesentlich besseren Methode (Entmagnetisierungsapparat nach Gumlich und Rogowski) entmagnetisierte und die gleichen Resultate wie früher erhielt, trotzdem die alten Untersuchungen Lord Rayleighs²⁾ und neuere von Hoffmann³⁾ (vgl. z. B. seine Diagramme Figg. 8 und 10) zu den gleichen Resultaten führten, wie meine Messungen, habe ich doch noch einige Kontrollmessungen für kleine Magnetisierungen angestellt, um die Entmagnetisierung mit größerer Genauigkeit zu prüfen und sicher zu sein, daß mein Gesetz nicht etwa durch eine mir und anderen entgangene Unstetigkeit in der Nähe von $\mathfrak{M} = 0$ ungültig würde.

Die Ergebnisse waren folgende:

Weicher Stahl.		Gehärteter Remy-Stahl.	
\mathfrak{M}	μ_r	\mathfrak{M}	μ_r
0,9	89,82	0,23	40,33
45	92,58	78	41,98
90	91,22	150	42,35
150	91,03	215	42,09
43,9	92,68	23,3	42,68
0,6	91,35		

für $\Delta \mathfrak{H} = 0,0223$ Gauss
Die Messung für $\mathfrak{M} = 43,9$
entspricht einer absichtlich erzeugten Remanenz.

für $\Delta \mathfrak{H} = 0,0358$ Gauss
Die Messung für $\mathfrak{M} = 215$ entspricht einer absichtlich erzeugten Remanenz, die für $\mathfrak{M} = 23,3$ einer absichtlich schlechten Entmagnetisierung

1) R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias. Univ. de La Plata 2. S. 145. 1918; Ann. d. Phys. 61. S. 379. 1920.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 23. S. 225. 1887 (mir unzugänglich).

3) Heinrich Hoffmann, Zyklische Magnetisierungen, die einer konstanten Magnetisierung überlagert sind, nebst Anwendungen auf das Telephon. Dissert. d. Univ. Jena 1913.

Die Resultate sind graphisch in den Figg. 3 und 4 dargestellt. Man sieht, daß die Ergebnisse mit dem Typus meiner früheren Kurven (vgl. Fig. 1) und nicht mit dem der Erhardt-schen Kurven (vgl. Fig. 2) übereinstimmen.

Selbstverständlich müssen die Zusatzfelder $\Delta \mathfrak{H}$ praktisch unendlich klein sein, d. h. eine weitere Verkleinerung darf

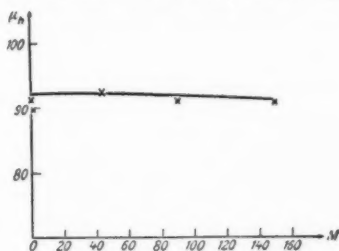


Fig. 3. Weicher Stahl.

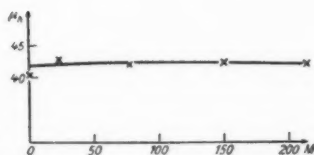


Fig. 4. Harter Remy-Stahl.

keinen Einfluß auf μ_r mehr haben. Die obere Grenze hängt von der Genauigkeit, die man erreichen will, ab, zweitens vom Material, insofern als bei magnetisch harten Stoffen $\Delta \mathfrak{H}$ viel größer gewählt werden darf (vgl. z. B. die Resultate der Arbeit von Gumlich und Rogowski über die Anfangspermeabilität¹⁾), und schließlich von der Magnetisierung, denn ein $\Delta \mathfrak{H}$, welches für große \mathfrak{M} als unendlich klein gelten kann, kann für kleine \mathfrak{M} diesen Anspruch nicht ohne Weiteres erheben.

Meine diesbezüglichen Messungen ergaben:

Weicher Stahl.		Gehärteter Remy-Stahl.	
$\Delta \mathfrak{H}$ in Gauss	μ	$\Delta \mathfrak{H}$ in Gauss	μ
0,00847	87,83	0,0240	40,51
0,0168	89,58	0,0358	40,34
0,0223	90,31	0,0710	40,58
0,0333	91,70	0,101	40,55
0,0470	94,59		
0,0544	96,64		

1) E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. 34. S. 254. 1911.

Während beim gehärteten Remy-Stahl Zusatzfelder von 0,1 Gauss noch als unendlich klein gelten können, zeigt die

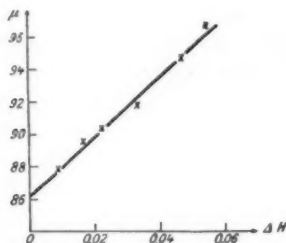


Fig. 5.

auf die weiche Stahlsorte bezügliche Meßreihe, welche in Fig. 5 graphisch dargestellt ist, den linearen Verlauf

$$\mu = a + b \Delta H,$$

der für die Anfangspermeabilität bei etwas größeren Feldern charakteristisch ist.

Aus dieser graphischen Darstellung ersehen wir, daß unsere Messungen an weichem Stahl, die zwecks größerer Empfindlichkeit mit Zusatzfeldern $\Delta H = 0,0223$ Gauss ausgeführt worden sind, bei diesem Material in der Tat noch auf unendlich kleine Felder reduziert werden müssen und dann um einige Prozente kleinere Werte liefern. Diese Korrektur ändert aber nichts am Verlaufe der Kurve.

La Plata, 6. November 1920.

Instituto de Física.

(Eingegangen 10. Dezember 1920.)

4. *Über die Trägererzeugung hochfrequenter Wellenstrahlung in abgeschlossenen Gasräumen;* *von A. Becker und H. Holthusen.*

Durchsetzt hochfrequente Wellenstrahlung einen abgeschlossenen Gasraum, so werden sowohl die getroffenen Wände als die Moleküle des Gases längs des Strahlweges infolge lichtelektrischer Wirkung zu Emissionszentren von Elektronen, die beim Durchgang durch das Gas unter Geschwindigkeitsverlust Elektrizitätsträger erzeugen¹⁾, deren Anzahl durch den sogenannten Sättigungsstrom gemessen wird. Daß dieser Vorgang der Elektronenemission im betrachteten Fall die ausschließliche Ursache der (indirekten) Trägerbildung ist, wird nicht nur durch eine Reihe älterer²⁾ und eigener³⁾ neuer Versuche, sondern auch durch die quantentheoretische Betrachtung der Erscheinung wahrscheinlich gemacht.

Die Trägerbildung ist also nicht an den Weg des Wellenstrahles, sondern an denjenigen der emittierten Elektronen gebunden. Die Anzahl der von ihnen erzeugten Elektrizitätsträger hängt einerseits von ihrer Geschwindigkeit, die Funktion der absorbierten Wellenlänge ist, andererseits von ihrer Ausnutzung im Gasraum, die durch die geometrischen Verhältnisse mitbestimmt wird, ab. Soll aus der Trägerzahl allgemein auf deren Ursache geschlossen werden, so bedarf es darnach vor allem ausreichender Kenntnis des Umfanges der Wirkungsausnutzung im Gas und der damit zusammenhängenden quantitativen Unterscheidung zwischen Wand- und Gaswirkung.

1) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten; Heidelberg 1918, bei C. Winter.

2) Unter diesen ist als besonders beweisend die Wilsonsche Veranschaulichung der Trägerbildung (Proc. Roy. Soc. A. 85. S. 285. 1911) hervorzuheben."

3) H. Holthusen, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 215. 1919; außerdem im Folgenden unter B. 10.

Für das Experiment sowohl als für die Theorie besonders einfache Verhältnisse liefert der Fall einer von zwei planparallelen (theoretisch) unendlich ausgedehnten Wänden begrenzten Gasschicht, die normal von einem parallelen Wellenstrahlbündel durchsetzt wird. Er ist, worauf der eine von uns¹⁾ bereits hingewiesen hat, praktisch realisiert durch einen von einem schmalen Parallelstrahlenbündel axial durchsetzten Zylinderkondensator²⁾, dessen Radius den Wirkungsbereich³⁾ der auftretenden Elektronen übersteigt. Ein Einfluß seitlicher Wandteile auf die Trägererzeugung ist dann ausgeschlossen, und es bleibt nur der Einfluß der beiden vom Wellenstrahl bei seinem Ein- und Austritt durchsetzten Wände. Dieser ist im wesentlichen⁴⁾ zweierlei Art:

1. Die Wände beeinträchtigen mehr oder weniger erheblich die Trägererzeugung bei allen denjenigen Emissionszentren im Gas, deren Wandabstand innerhalb des Wirkungsbereiches ihrer Elektronen liegt (*Wirkungsausfall*).

2. Die Wände tragen ihrerseits zur Trägerbildung bei, indem sie selbst Elektronen in den Gasraum schicken, die entweder durch die hindurchtretende Wellenstrahlung oder durch auftreffende Elektronen aus dem Gas oder der Gegenplatte (infolge Rückdiffusion oder sekundärer Emission)⁵⁾ ausgelöst werden (*Wandwirkungsbeitrag*). Auch diese Strahlung kann einen „Wirkungsausfall“ erleiden.

Diese beiden Wandeinflüsse machen sich in entgegengesetztem Sinn geltend und können sich in geeigneten Fällen auch kompensieren. Für Zwecke der Strahlintensitätsmessung

1) H. Holthusen, a. a. O.

2) Ein Parallelplattenkondensator würde als elektrisch nicht abgeschlossenes System nicht ohne weiteres in Betracht kommen können.

3) Unter dem Wirkungsbereich eines Emissionszentrums bzw. seiner Elektronen verstehen wir denjenigen Raum, innerhalb dessen die Anzahl der letzteren infolge Absorption soweit (auf mindestens 1 Proz.) herabgesetzt wird, daß mit einer Strahlwirkung außerhalb dieses Bereichs praktisch nicht mehr gerechnet werden muß.

4) Von Streuung der hindurchtretenden Wellenstrahlung, die bei geeigneter Wahl von Stoff und Dicke der Wand vernachlässigt werden kann, abgesehen.

5) Eine Eigenstrahlung der benutzten Stoffe, die durch die Wahl der letzteren praktisch eliminierbar ist, sei im Gegenwärtigen außer Betracht gelassen.

ist eine solche Kompensation, d. h. eine *praktische Ausschaltung aller Wandwirkungen*, von besonderem Wert. Für die Untersuchung des lichtelektrischen Effekts an festen Medien ist der „Wandeinfluß“ dagegen Untersuchungsobjekt.

Die hieraus ersichtliche, für jede Auswertung einer Leitfähigkeitsmessung erhebliche Wichtigkeit einer quantitativen Beherrschung der genannten Verhältnisse hat uns veranlaßt, dieselben näherer theoretischer und experimenteller Untersuchung zu unterwerfen¹⁾, über deren Ergebnis hier berichtet sei.

A. Theoretisches.

Eine von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Wänden begrenzte Gasschicht werde normal von einer Hochfrequenzstrahlung durchsetzt. Wir können dann jedes Volumenelement auf dem Strahlweg als Emissionszentrum einer Kathodenstrahlung auffassen, deren räumliche Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung wir allseitig gleichförmig voraussetzen.²⁾

Für die Intensität der an jeder Raumstelle erregten Kathodenstrahlung ist die räumliche Verteilung der Wellenenergie über den gesamten Strahlweg maßgebend. Diese wird durch die beiden Erscheinungen der Diffusion und der Absorption bestimmt, welche im Falle eng begrenzter Parallelstrahlenbündel voneinander getrennt verfolgbar sind³⁾, bei unbegrenzten breiten Strahlenbündeln dagegen untrennbar zusammenwirken.⁴⁾ Welche räumliche Energieverteilung beim Durchgang einer Wellenstrahlung durch ein Medium resultiert, richtet sich dementsprechend außer nach der durchstrahlten Masse (Dicke \times spezifisches Gewicht) des Mediums insbesondere auch nach den geometrischen Verhältnissen, unter denen der Vorgang abläuft.

Die Anzahl der in jedem Volumenelement des Gases erzeugten Elektrizitätsträger (jedes Vorzeichens) setzen wir der

1) Die erstere wurde von dem einen von uns (B.) im Radiolog. Institut, die letztere von dem anderen (H.) in der Medizinischen Klinik der Universität durchgeführt.

2) Die nähere Begründung siehe Strahlentherapie 12. 1921.

3) Vgl. H. Holthusen, Physik. Zeitschr. 20. S. 5. 1919.

4) Vgl. die analogen Erscheinungen bei Kathodenstrahlen bei P. Lenard, a. a. O., wo dieselben zum erstenmal einer umfassenden strengen Behandlung unterworfen sind.

Anzahl der das Volumen durchlaufenden Elektronen und dem elementaren Strahlweg proportional voraus, wobei wir die Elektronengeschwindigkeit sowohl bezüglich der Trägerbildung als für die Berechnung der Strahldichte der einfacheren Behandlung wegen zunächst als konstant annehmen. An späterer Stelle (A 7 u. 8) zeigen wir direkt, daß auch eine strengere Behandlung¹⁾ des Gegenstandes, insbesondere die Berücksichtigung des tatsächlich vorhandenen (für die gesamte Trägerbildung verantwortlichen) Geschwindigkeitsverlustes und einer Geschwindigkeitsverteilung²⁾ der lichtelektrischen Elektronen die wesentlichen Ergebnisse der einfachen Herleitung in erster Näherung nicht verändert.

Um die Trägerbildung im Einzelnen zu verfolgen, kann der gesamte durchstrahlte Gasraum im allgemeinen in 3 Teile zerlegt werden, nämlich zwei nach außen durch dessen Endflächen begrenzte Abschnitte von der Höhe des Radius des Wirkungsbereichs der Elektronen (R) und den bleibenden Zwischenabschnitt.

Der letztere ist dadurch ausgezeichnet, daß alle längs des Wellenstrahles in ihm ausgelösten Elektronen in ihrer Ausbreitung allseitig praktisch unbeschränkt sind und zur Trägerbildung also voll ausgenutzt werden. Es ist dies das Gebiet der reinen Gaswirkung. In den beiden Endabschnitten dagegen tritt einerseits ein Wirkungsausfall ein für alle innerhalb derselben liegenden Emissionszentren, während andererseits in vollem Umfang (einseitig) ein Wandwirkungsbeitrag hinzutritt. Nimmt die Länge des gesamten durchstrahlten Gasraums ab, so kann der Zwischenabschnitt verschwinden und Wirkungsausfall auch für den Wandwirkungsbeitrag eintreten.

Der Betrachtung dieser Fälle legen wir zunächst Homogenität der Wellenstrahlung zugrunde und gehen danach auf den Einfluß einer Veränderung der Wellenlänge ein (A 7).

1. Wirkungsausfall bei einseitiger Begrenzung.

Ist das durchstrahlte Gas einseitig durch eine zum Wellenstrahl normal stehende ebene Wand begrenzt, so tritt hinsichtlich der Trägererzeugung ein Wirkungsausfall ein für alle Elek-

1) Soweit diese beim gegenwärtigen Stand der hierhergehörigen Kenntnis möglich ist.

2) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

tronenemissionszentren, welche im Gas innerhalb eines Wandabstands vom Radius R ihres Wirkungsbereichs erzeugt werden.

Um den relativen Durchschnittswert für die Trägerbildung innerhalb R zu ermitteln, seien auf dem Strahlweg der Länge R im Gas n äquidistante Elementarvolumina als Emissionszentren einer allseitig sich kugelförmig ausbreitenden Kathodenstrahlung angenommen. Deren relative Ausnutzung zur Trägerbildung kann als Summe von zwei Teilen betrachtet werden, von denen der eine von rein geometrischen Beziehungen abhängt, während der andere von der Art des physikalischen Vorganges mitbestimmt wird.

Der Betrag des ersten Teils läßt sich darstellen durch den Prozentsatz der Elektronen, der infolge bestimmter Emissionsrichtung überhaupt keinen Wirkungsausfall erleidet. Man findet für ihn den Wert

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{n} \right) \right]_{n=\infty} = \left[\frac{3n-1}{4n} \right]_{n=\infty} = \frac{3}{4}.$$

Einen Wirkungsausfall erleiden nur diejenigen Elektronen des Gases, deren Bahn innerhalb eines zu jedem Emissionszentrum gehörigen bestimmten Kugelsektors (vom halben Öffnungswinkel φ) verläuft, und er ist die Folge davon, daß das Volumen jedes solchen Sektors durch die ebene Begrenzung um einen Kugelabschnitt verringert wird, so daß sich die Trägerbildung auf den zugehörigen *Kegel* beschränkt.

Greifen wir wieder auf dem Strahlweg der Länge R im Gas n äquidistante Emissionszentren heraus und bezeichnen die Anzahl der von jedem Zentrum ausgehenden Elektronen mit i_0 , so ist der Beitrag jedes Zentrums zur Elektronendichte im Abstand r von ihm

$$\frac{i_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \cdot e^{-ar},$$

wo a den *praktischen* Absorptionskoeffizienten der Kathodenstrahlen für das Gas bezeichnet.

Die innerhalb eines ein Emissionszentrum umgebenden Kugelraums vom Radius R erzeugte Trägerzahl ergibt sich hieraus zu

$$T_0 \frac{i_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-a r} \sin \varphi \cdot dr d\vartheta d\varphi = T_0 \frac{i_0}{\alpha} (1 - e^{-a R})$$

$$\sim T_0 \frac{i_0}{\alpha},$$

da $e^{-a R}$ der Definition von R gemäß praktisch nicht in Betracht kommt. Der hier als konstant betrachtete Proportionalitätsfaktor T_0 hat die Dimension einer reziproken Länge und bezeichnet diejenige Trägerzahl, die von einem Elektron auf der Längeneinheit seines Weges erzeugt wird.¹⁾

Mit dieser Trägerzahl ist diejenige zu vergleichen, welche jeweils in einem Kegelraum erzeugt wird, dessen Grundfläche die begrenzende Wand ist und dessen Spitze im betrachteten Emissionszentrum liegt. Schließlich ist der arithmetische Mittelwert dieses „relativen Kegelbeitrags“ für alle innerhalb des Wandabstands R angenommenen n Emissionszentren zu bilden und der erhaltene Wert nach Übergang zu großem n mit dem oben aus rein geometrischen Betrachtungen erhaltenen zu vereinigen. Man findet auf diese Weise für den *gesamten Wirkungsäusfall innerhalb des betrachteten Abschnittes von der Höhe des Wirkungsbereichs der auftretenden Elektronen, gemessen in Teilen der ohne Begrenzung möglichen Vollwirkung*, den Ausdruck

$$\frac{1}{2\alpha R} - \frac{\alpha R}{4} \mathfrak{E}i(-\alpha R)$$

$$+ \frac{\alpha R}{2n^2} \left\{ \mathfrak{E}i\left(-\alpha \frac{R}{n}\right) + \dots + (n-1) \mathfrak{E}i\left(- (n-1) \frac{\alpha R}{n}\right) \right\}_{n \text{ groß}},$$

wo $\mathfrak{E}i$ das Exponentialintegral bezeichnet.

Man erkennt, daß dessen Wert nur von dem feststehenden Produkt αR bestimmt wird und daß die Natur des Gases und die Geschwindigkeit der Elektronen nur insofern Einfluß gewinnen, als sie den Radius R des Wirkungsbereiches festlegen,

1) Er hat nach Hrn. Lenard, a. a. O. S. 141, die Bedeutung der „differentialen Sekundärstrahlung“, die, sofern tertiäre und weitere Strahlung mit einbezogen wird, als „summarische“ aufzufassen ist.

2) Für $\alpha R = 5$ und wachsende Werte von n ist der Betrag der Integralreihe

n	10	20	50
	0,0449	0,0479	0,0491;

derselbe nähert sich also 0,05, d. i. die Hälfte von $\frac{1}{2\alpha R}$.

der diesem Produkt zugehört. Bezieht man die Aussagen auf R als Längeneinheit für den Strahlweg, so fällt auch dieser Einfluß weg.

2. Wirkungsausfall bei zweiseitiger Begrenzung.

Ist die Gasschicht von zwei zum hindurchtretenden Wellenstrahl normalen ebenen Wänden im gegenseitigen Abstand L begrenzt, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a) $L > 2R$. Man kann in diesem Falle die Gasschicht in die früher erwähnten 3 Abschnitte zerlegen. Allen im Zwischenabschnitt der Länge $L - 2R$ auftretenden Emissionszentren kommt Vollwirkung zu, während die beiden Grenzabschnitte einen Wirkungsausfall liefern, der im Ganzen durch Verdoppelung des oben (A 1) berechneten Wertes erhalten wird.

b) $L \leq \frac{2R}{n}$. Keinem Emissionszentrum im Gas kommt jetzt noch Vollwirkung zu. Der gesamte Wirkungsausfall beträgt jetzt, in Teilen derjenigen Trägerzahl, die bei voller Ausnutzung aller im Gas erzeugten Elektronen zu erwarten wäre,

$$\frac{1}{\alpha L} - \frac{\alpha R^2}{2L} \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha R) + \frac{\alpha R^2}{n^2 L} \cdot \left\{ \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \dots + (n-1) \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) \right\}_{n \text{ groß}}$$

c) $L < R$. Dieser Fall wird stets bei Verwendung von γ -Strahlen vorliegen. Der gesamte Wirkungsausfall wird, im oben benutzten Maß,

$$\frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha L} - \frac{\alpha L}{2} \mathfrak{E}i(-\alpha R) + \frac{\alpha R^2}{n^2 L} \cdot \left\{ \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \dots + \frac{L}{R} \mathfrak{E}i(-\alpha L) \right\}_{n \text{ groß}}$$

Die folgende Tabelle enthält ein numerisches Beispiel. Sie gibt den Wirkungsausfall in Teilen der Vollwirkung an für Wandabstände von 1–100 cm und den Absorptionskoeffizienten $\alpha = 0,5 \text{ cm}^{-1}$, wie er in Luft Kathodenstrahlen von etwa 0,5 Lichtgeschwindigkeit zukäme.¹⁾

1) Vgl. P. Lenard, a. a. O., Tafel III. Für andere Werte von α wären nur die zu den Angaben der Tabelle gehörigen L -Werte im umgekehrten Verhältnis der α abzuändern.

Tabelle 1.

 $\alpha = 0,5 \text{ cm}^{-1}$ $\alpha R = 5$

$L \text{ cm}$	1	2	4	10	20	50	100
$\frac{\text{Wirkungsausfall}}{\text{Vollwirkung}}$	0,55	0,39	0,23	0,11	0,052	0,021	0,010

Bei geringen Gasstrecken (verglichen mit R) macht sich der Wirkungsausfall sehr stark bemerkbar; mit zunehmendem Strahlweg tritt sein Einfluß mehr und mehr zurück und kann schließlich nahe vernachlässigt werden.¹⁾

3. Wandstrahlung.

Wenn, wie wir annehmen, Eigenstrahlung des Wandmaterials nicht wesentlich ist, so handelt es sich nur noch um die vom hindurchtretenden Wellenstrahl ausgelöste lichtelektrische Kathodenstrahlung. Wir dürfen bei ihr voraussetzen, daß ihre Eigenschaften mit denjenigen der im Gas erregten Kathodenstrahlen völlig identisch sind. Wir setzen auch jetzt gleichförmige räumliche Verteilung der Elektronen rings um ihr Emissionszentrum voraus, berücksichtigen aber, daß für die Trägererzeugung im abgeschlossenen Gasraum bei der einen Wand die Austrittsstrahlung (die die Wand in Richtung der austretenden Wellenstrahlung verläßt), bei der anderen die Eintrittsstrahlung (die rückläufig ist) in Betracht kommt.¹⁾

Alle zur Berechnung erforderlichen auf die Wand bezüglichen Bestimmungstücke seien mit den gleichen, zur Unterscheidung gestrichenen, Bezeichnungen wie für den Gasraum eingeführt. Es sei also für die Wände μ_0' der wahre Absorptionskoeffizient der Hochfrequenzstrahlung, α' der praktische Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlen und L' die Wanddicke.

a) *Austrittsstrahlung.* — Durchsetzt ein schmales Wellenstrahlenbündel die planparallele Wand in der Normalenrichtung, ist J_0 die eintretende Energie, so wird die gesamte unter dem Winkel φ gegen die Normale austretende Kathodenstrahlintensität

$$di_{\varphi} = \frac{1}{2} k' \cdot J_0 \frac{\mu_0'}{\alpha'} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \left\{ e^{-\mu_0' L'} - e^{-\frac{\alpha' L'}{\cos \varphi}} \right\} \cdot d\varphi,$$

1) Über weitere Voraussetzungen vgl. Strahlentherapie 12. 1921.

wo k' die Elektronenzahl angibt, welche der Einheit der verschwindenden Wellenenergie zukommt (Emissivitätskoeffizient). Die Ausstrahlung der Wand erfolgt also bei nicht zu geringen Dicken (falls die zweite Exponentialgröße praktisch verschwindet) nach dem Kosinusgesetz.

Für die Gesamtintensität der Austrittsstrahlung findet sich nach Integration der Wert

$$i_e = \frac{1}{4} k' J_0 \frac{\mu_0'}{\alpha'} \cdot \{e^{-\mu_0' L'} + (\alpha' L' - 1) \cdot e^{-\alpha' L'} + \alpha'^2 \cdot L'^2 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha' L')\}.$$

Derselbe wächst mit der Dicke von Null an bis zu einem Maximum und fällt dann mit der Energie der Wellenstrahlung ab. Dies tritt ein, sobald die Dicke L' den Radius des Wirkungsbereiches der Elektronen in der Wand erreicht oder überschreitet.

b) *Eintrittsstrahlung*. — Die räumliche Dichte der die Wand unter dem Winkel φ rückläufig verlassenden Elektronen ist

$$\frac{1}{4\pi} k' J_0 \frac{\mu_0' \cos \varphi}{\alpha'} \left\{ 1 - e^{-L' \left(\mu_0' + \frac{\alpha'}{\cos \varphi} \right)} \right\};$$

es liegt also auch hier naturgemäß das Kosinusgesetz vor. Die Gesamtzahl aller rückläufig aus der Wand austretenden Elektronen wird danach

$$i_e = \frac{1}{4} k' J_0 \frac{\mu_0'}{\alpha'} \{ 1 + e^{-\mu_0' L'} \cdot [(\alpha' L' - 1) \cdot e^{-\alpha' L'} + \alpha'^2 L'^2 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha' L')] \}.$$

Für kleinere Dicken, bei denen $e^{-\mu_0' L'}$ noch nicht merklich von der Einheit verschieden ist, sind i_e und i_a praktisch identisch. Ein Unterschied macht sich erst bei größeren Dicken bemerkbar, indem i_e einem konstanten Wert zustrebt, während i_a , wie oben erwähnt, abnimmt.

4. Wirkungsbeitrag der Wandstrahlung.

Da wir von großen Waddicken an der Durchgangsstelle des Wellenstrahls der Vermeidung merklicher Diffusion wegen absehen, darf der geringfügige Unterschied des analytischen Ausdrucks für die Ein- und Austrittsstrahlung mit völlig ausreichender Annäherung an die Wirklichkeit unberücksichtigt bleiben und zwar um so mehr, als in unserem Fall die für die

Erregung dieser beiden Strahlungen maßgebenden Wellenstrahlenergien sich nur um den auf der Gasstrecke absorbierten als geringfügig anzusehenden Betrag unterscheiden.

Die Wandstrahlung erzeugt hiernach innerhalb eines Sektors mit dem Radius R und dem halben Öffnungswinkel φ die Trägerzahl

$$\frac{1}{4} k' J_0 T_0 \frac{\mu_0'}{\alpha' \alpha} \left\{ e^{-\mu_0' L'} \cdot \sin^2 \varphi + e^{-\frac{\alpha' L'}{\cos \varphi}} \cdot \cos \varphi (\cos \varphi - \alpha' L') \right. \\ \left. + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot \left[\mathfrak{E}i(-\alpha' L') - \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha' L'}{\cos \varphi}\right) \right] \right\}.$$

Hinsichtlich der Ausnutzung der Wandstrahlung im Gas sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

a) $L \geq R$. Die Ausnutzung der Strahlung beider Wände ist eine (einseitig) vollständige. Die erzeugte Trägerzahl wird nach Vorstehendem (für beide Wände zusammen)

$$\frac{1}{2} k' J_0 T_0 \frac{\mu_0'}{\alpha' \alpha} \left\{ e^{-\mu_0' L'} + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha' L') \right\};$$

mit wachsender Wanddicke L' nimmt der Einfluß der beiden letzten Summanden rasch ab und verschwindet schließlich.

b) $L < R$. Jetzt unterliegt auch die Wandstrahlung dem Wirkungsausfall. Die erzeugte Trägerzahl setzt sich aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine der Beitrag eines Kegels von der Höhe $R \cdot \cos \varphi$ ist, der andere der Beitrag eines den zugehörigen Sektor zur Halbkugel ergänzenden Sektoringes mit dem halben Winkelbereich φ bis $\pi/2$.

Der *relative Wirkungsausfall*, d. i. der Wirkungsausfall bezogen auf die maximal mögliche Wandstrahlenwirkung (Fall a), ergibt sich demnach zu

$$\frac{e^{-\alpha L} \cdot (1 - \alpha L) + e^{-(\alpha L + \alpha' L')} \cdot (\alpha L + \alpha' L' - 1) - \alpha^2 L^2 \mathfrak{E}i(-\alpha L) \\ + e^{\mu_0' L'} \cdot (\alpha L + \alpha' L')^2 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha L - \alpha' L')}{1 + e^{-\alpha' L'} \cdot (\alpha' L' - 1) + \alpha'^2 L'^2 \cdot e^{\mu_0' L'} \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha' L')}$$

Derselbe ist, wie erforderlich, für $L = 0$ gleich 1 und nähert sich mit wachsendem L der Null. Mit zunehmender Wanddicke erfolgt Annäherung an den von weiterer Dickensteigerung unabhängigen Wert

$$e^{-\alpha L} \cdot (1 - \alpha L) - \alpha^2 L^2 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha L).$$

Der hierdurch gegebene Gang mit dem Wandabstand L ist für den früher (Tab. 1) betrachteten Fall der folgende:

Tabelle 2.

$\alpha = 0,5 \text{ cm}^{-1}$		Große Wanddicke				
$L \text{ cm}$	0,5	1	2	4	10	
Wandwirkungsausfall	0,65	0,44	0,22	0,06	0,0007	
Vollwirkung						

5. Gas- und Wandstrahlung.

Zur Beurteilung der in unserem Gasraum beobachtbaren Gesamtträgererzeugung bedarf es jetzt noch eines Vergleichs der *Absolutwerte der Trägerzahl*, welche den beiden verschiedenen Elektronenquellen, dem Gas und den Wänden, zugehören.

Im Gas hat die Anzahl der an der Stelle x auf der Längeneinheit emittierten Elektronen den Wert

$$\frac{d\dot{z}_x}{dx} = k\mu_0 \cdot J_0 \cdot e^{-\mu_0 x},$$

worin die Exponentialgröße im allgemeinen praktisch $= 1$ gesetzt werden kann. Diesem entspricht bei voller Ausnutzung aller Elektronen im Gas eine Trägerzahl

$$\frac{T_0}{\alpha} \cdot k \cdot \mu_0 \cdot J_0 \quad \text{nach (A 1).}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$G = \alpha L - 1 + e^{-\alpha L} + \frac{\alpha^3 L^3}{2} \mathfrak{E}i(-\alpha R) - \frac{\alpha^3 R^3}{n^3} \left\{ \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \dots + \frac{L}{R} n \mathfrak{E}i(-\alpha L) \right\}_{n \text{ groß}}$$

für $L < R$

$$\text{bzw.} = \alpha L - 1 + \frac{\alpha^3 R^3}{2} \mathfrak{E}i(-\alpha R) - \frac{\alpha^3 R^3}{n^3} \left\{ \mathfrak{E}i\left(-\frac{\alpha R}{n}\right) + \dots + n \mathfrak{E}i(-\alpha R) \right\}_{n \text{ groß}}$$

für $L \geq \frac{R}{2}$,

$$W = 1 + e^{-\alpha L} \cdot (\alpha L - 1) + \alpha^3 L^3 \cdot \mathfrak{E}i(-\alpha L),$$

so ist bei einem Wandabstand von L cm und ausreichender Wanddicke¹⁾ die von der Gasstrahlung erzeugte Trägerzahl

$$\Sigma_G = \frac{T_0}{\alpha^2} k \mu_0 \cdot J_0 \cdot G,$$

die von der Wandstrahlung erzeugte Trägerzahl

$$\Sigma_W = \frac{T_0}{2\alpha\alpha'} \cdot k \cdot \mu_0' \cdot J_0 \cdot W,$$

das Ausnutzungsverhältnis der im Gas erzeugten Elektronen

$$\frac{G}{\alpha L}.$$

Setzen wir schließlich $\alpha' = \text{prop. } \alpha$, was jedenfalls mit großer Annäherung für alle in Betracht kommenden α zulässig sein wird, und führen wir noch die von L unabhängige Konstante

$$A = 2 \cdot \text{prop. } \frac{k \mu_0}{k' \mu_0'}$$

ein, so wird der Absolutwert der Gesamtträgerzahl

$$\Sigma = \Sigma_G + \Sigma_W = \frac{T_0}{\alpha^2} k \mu_0 \cdot J_0 \cdot \left(G + \frac{W}{A} \right)$$

und das Verhältnis der Trägerzahlen von Wand und Gasstrahlung

$$\frac{W}{A G}.$$

Einen Einblick in die vorliegenden Verhältnisse möge die folgende Tabelle geben, die eine Ergänzung des früher betrachteten Beispiels ($\alpha = 0,5 \text{ cm}^{-1}$) darstellt. Sie enthält für verschiedene Wandabstände L (bzw. verschiedene Werte von αL allgemein) zunächst die entsprechenden Werte von G und W und dann den Gang der Gesamtträgerzahl Σ (der Faktor $\frac{T_0}{\alpha^2} k \mu_0 \cdot J_0 = 1$ gesetzt) für die beiden Werte $A = 1$ und $A = 2$, letzterer geringerem, ersterer größerem Wand-einfluß entsprechend.

Die auf die Längeneinheit bezogene Trägerzahl Σ/L zeigt im Falle $A = 1$ einen erheblichen Gang nach abnehmenden Werten, während ein solcher im Falle $A = 2$ nahezu völlig beseitigt ist. Für größere Werte von A , noch geringerer Wandstrahlung entsprechend, würde Σ/L mit zunehmendem L an-

1) Für welche $e^{-\alpha' L}$ praktisch Null ist.

steigen. In jedem Fall erfolgt Annäherung von Σ/L mit wachsendem L an den der Vollwirkung der Gasstrahlung entsprechenden Wert.

Tabelle 3.

 $a = 0,5 \text{ cm}^{-1}$.

Große Wanddicke

$L \text{ cm}$	1	2	3	5	10	20
G	0,232	0,617	1,060	2,013	4,483	9,477
W	0,557	0,781	0,886	0,967	1,000	1,000
$A = 1 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \\ \Sigma/L \end{array} \right.$	0,789 0,789	1,398 0,699	1,946 0,649	2,980 0,596	5,483 0,548	10,477 0,524
$A = 2 \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \\ \Sigma/L \end{array} \right.$	0,511 0,511	1,007 0,503	1,503 0,501	2,497 0,499	4,983 0,498	9,977 0,499

6. Kompensation des Wirkungsausfalls durch den Wandwirkungsbeitrag.

Wenn bei dem Wandabstand L der Wirkungsausfall der Gasstrahlung durch den Wirkungsbeitrag der Wandstrahlung kompensiert werden soll, so muß

$$\alpha L - G = \frac{W}{A}$$

sein¹⁾, so daß (nach 5)

$$\Sigma = \frac{T_0}{a} \cdot k \mu_0 \cdot J_0 \cdot L,$$

die Gesamtträgerzahl also einfach der Länge L proportional wird. Man erkennt, daß eine solche Kompensation, wenn sie für einen bestimmten Wert von L erreicht ist, gleichzeitig bei allen L -Werten bestehen bleibt.

Die Herstellung dieser Kompensation durch geeignetes Wandmaterial hat also den besonderen Wert, daß der Meßraum als nicht von Wänden begrenzt und daß das Meßergebnis daher als reine Gaswirkung angesehen werden kann.

Die Ermittlung der für die Kompensation maßgebenden Größe A ergibt für sie mit großer Annäherung den Wert $A = 2$ (vgl. hiermit Tab. 3).

Es ist noch von Interesse, mit diesem Wert das Verhältnis der Trägerzahlen von Wand- und Gasstrahlung W/AG (vgl. 5) für verschiedene Werte von aL zu berechnen. Das Ergebnis zeigt Tab. 4.

1) Wir betrachten hier vorzugsweise den Fall großer Wanddicke.

Tabelle 4.
Vergleich von Wand- und Gaswirkung im Kompensationsfall.

$a L$	W/AG	$a L$	W/AG
0,5	1,155	4	0,146
1	0,621	5	0,115
2	0,306	10	0,055
3	0,198		

W/AG ist aL nahe umgekehrt proportional. Dies Ergebnis würde auch für jeden beliebigen A -Wert Geltung behalten.

7. Einfluß der Elektronengeschwindigkeit.

Für die Größe der Elektronengeschwindigkeit sind außer den Absorptionskoeffizienten a und a' die Konstanten T_0 , k und k' charakteristisch. Da die Ausdrücke für G und W nur Funktionen der Produkte aL , $a'L$ bzw. aR sind, so sind sie auf beliebige Elektronengeschwindigkeiten anwendbar, sofern nur den durch sie festgelegten verschiedenen a -Werten entsprechend veränderte L - oder R -Werte zugeordnet werden. Besonders wichtig ist die folgende Feststellung:

Da im Falle der oben betrachteten Kompensation die Größe A für alle Werte von aL (sehr nahe) den gleichen Wert behält, so bleibt die etwa für eine bestimmte Elektronengeschwindigkeit hergestellte Kompensation für jede beliebige andere Geschwindigkeit unverändert erhalten, sofern nur die Größe A selbst durch diese unbeeinflusst bleibt.

Dies ist für das Experiment insofern bedeutungsvoll, als beim lichtelektrischen Effekt auch bei Verwendung homogener Wellenstrahlung niemals eine einheitliche Elektronengeschwindigkeit, sondern immer eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung¹⁾ auftritt. Es ist also auch in diesem Falle unter der erwähnten Bedingung eine Kompensation gleichzeitig für alle Elektronen erreichbar und damit die beobachtbare Trägerbildung als reine Vollwirkung im Gas aufzufassen.

Da das Verhältnis, in dem die Wand- und die Gasstrahlung an der beobachtbaren Trägerbildung beteiligt sind, wie wir zeigten, von aL abhängt, so muß es bei festgehaltenem L

1) Vgl. C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. S. 1121. 1914; A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

mit der Elektronengeschwindigkeit nach Maßgabe ihres Absorptionskoeffizienten a und daher auch mit der Wellenlänge der Hochfrequenzstrahlung sich ändern. Da a der zugehörigen Wirkungsweite R umgekehrt proportional ist, so folgt (aus 6) bei konstantem A sehr nahe Proportionalität dieses Verhältnisses mit der Wirkungsweite der Elektronen, wie der eine von uns¹⁾ bereits vermutet und durch entsprechende Versuche es belegt hat.

8. Geschwindigkeitsverlust der Elektronen.

Die vorstehenden Entwicklungen beruhen auf der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen beim Durchgang durch die Materie konstant sei. Tatsächlich erfolgt aber ein Geschwindigkeitsverlust, wodurch einerseits die Absorption, andererseits die Trägererzeugung jedes einzelnen Elektrons eine Änderung erfahren.²⁾ Die bisherigen Betrachtungen sind daher nur als Annäherungen an die Wirklichkeit aufzufassen, und es bedarf einer besonderen Untersuchung des Grades dieser Annäherung. Diese muß sich beim Stand unserer gegenwärtigen Kenntnis auf eine Überslagsbetrachtung beschränken.

Infolge des Geschwindigkeitsverlustes erfolgt die Abnahme der Kathodenstrahlintensität (Elektronenzahl) mit dem Abstand von der Erzeugungsstelle rascher, als wir oben angesetzt haben, indem an die Stelle der Exponentialfunktion mit konstantem Absorptionskoeffizienten eine solche mit wachsendem Koeffizienten tritt. Da aber gleichzeitig mit abnehmender Geschwindigkeit die Sekundärstrahlerregung im Gas zunimmt, so vermögen beide Erscheinungen zusammen ihren Einzeleinfluß bis zu einem gewissen Grade zu kompensieren und damit den Einfluß des Geschwindigkeitsverlustes auf die nachweisbare Trägererzeugung sowohl der Gas- als der Wandstrahlung wesentlich zu verringern.

Verfolgt man die Verhältnisse quantitativ³⁾, so zeigt sich, daß die Veränderungen, die das Ergebnis unseres Annäherungs-

1) H. Holthusen, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 26. S. 223. 1919; die hierin die „Wandstrahlung“ betreffenden Aussagen beziehen sich naturgemäß auf die *Wandstrahlenwirkung* im Meßraum.

2) Vgl. P. Lenard, Quantitatives . . . Spezieller Teil III und V.

3) Vgl. A. Becker u. H. Holthusen, Strahlentherapie 12. 1921.

verfahrens durch eine strengere Rechnung erleiden würde, tatsächlich als geringfügig zu bezeichnen sind und dies um so mehr, wenn man dem Geschwindigkeitsverlust etwa dadurch in einfachster Weise genügend Rechnung trägt, daß man den Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlung mit einem etwas erhöhten bzw. den Radius des Wirkungsbereiches mit einem entsprechend verringerten Betrag einsetzt.

9. Elektronenrückdiffusion und Sekundärstrahlerregung an den Wänden.

Wir haben bisher angenommen, daß alle die Wände treffenden Kathodenstrahlen für die Trägererzeugung nicht mehr in Betracht kommen. Das trifft aus zwei Gründen nicht streng zu. Erstens wird ein bestimmter Bruchteil der auftreffenden Strahlen in den Gasraum mit verringerter Geschwindigkeit rückdiffundiert¹⁾, und zweitens werden sekundäre Kathodenstrahlen mit relativ erheblich viel kleinerer Geschwindigkeit an den Wänden neu erzeugt.²⁾ Beide Erscheinungen wirken in dem Sinne einer vermehrten Wandstrahlung. Sie können daher in gewissem Grade die durch Geschwindigkeitsverlust verursachte gesteigerte Absorption der Wandstrahlung, soweit sie durch vermehrte Sekundärstrahlung im Gas nicht völlig ausgeglichen wird, noch kompensieren. Die Sekundärstrahlung der Wände wird hierbei meist, soweit ihre Geschwindigkeit in der Nähe der 11 Voltgrenze bleibt, für die Trägerbildung nicht erheblich sein. Wie weit dann die Rückdiffusion sich noch in einer Überkompensation der oben genannten Einflüsse geltend machen könnte, ist durch den Versuch zu entscheiden; wir kommen hierauf im Nachfolgenden zurück.

B. Experimentelles.

Die mitzuteilenden Versuche sollen zunächst den älteren Beweisen für die indirekte Trägerbildung der Hochfrequenzstrahlen einen weiteren hinzufügen und dann die Ergebnisse der vorstehenden theoretischen Betrachtungen näherer Prüfung unterwerfen.

Die benutzte Versuchsanordnung ist im wesentlichen die früher beschriebene. Zur Verwendung kommt ein durch scharfe

1) Vgl. P. Lenard, a. a. O. S. 194f.

2) Vgl. P. Lenard, a. a. O. S. 133f.

Ausblendung erhaltenes schmales Bündel der durch Vorfilterung angenähert homogen¹⁾ gemachten Hochfrequenzstrahlung einer Glühkathodenröhre.

10. Nachweis der Erzeugung rascher lichtelektrischer Kathodenstrahlung in Luft.

Während der eine von uns diesen Nachweis früher indirekt durch die Beobachtung erbrachte, daß die Trägererzeugung in einem Zylinderkondensator durch stark durchdringende paraxiale Wellenstrahlung mit dem Durchmesser des Kondensators wächst, fügen wir jetzt einen direkten Nachweis der Kathodenstrahlerzeugung hinzu.

Wir benutzten einen Zylinderkondensator aus 0,5 mm dickem Aluminiumblech von 8 cm Durchmesser und 12 cm Länge, welcher in der Zylinderwand ein achsenparalleles rechteckiges Fenster von 10 cm Länge und 1 cm Breite trug. Diesem parallel lief in 2,2 cm Abstand außerhalb des Kondensators ein Wellenstrahlbündel von rechteckigem Querschnitt. Wurde das Fenster mit einem 0,3 mm dicken Aluminiumblech verschlossen, so konnte die vorhandene Luftleitfähigkeit im Kondensator nur durch gestreute Wellenstrahlung hervorgerufen sein. Diese war stets vorhanden und machte sich um so stärker bemerkbar, je härter die Strahlung war.

Eine Zunahme der Leitfähigkeit nach Vertauschung des dicken Fensters durch eine Aluminiumfolie von 0,008 mm Dicke könnte entweder durch eine stark absorbierbare Wellenstrahlung oder durch lichtelektrisch erzeugte Kathodenstrahlen hervorgerufen sein. Da die erstere in den Versuchen nicht in Betracht kommen konnte, trifft nur das letztere zu.

Bei einer mit 0,25 mm Kupfer gefilterten Strahlung der mittleren Wellenlänge 0,28 A. E. ergab die Entladung eines mit dem Meßkondensator verbundenen Elektrometers die folgenden Werte:

mit 0,3 mm Aluminiumfenster	mit 0,008 mm Aluminiumfenster
4,5	7,7
5,6	7,2
6,1	7,9
4,1	7,9
Mittel 5,1 Sk/Min.	Mittel 7,7 Sk/Min.

Zunahme 2,6 Sk/Min.

1) Zu schließen aus Absorptionsbeobachtungen.

Dieser Gang ist bei Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Verhältnisse des Versuchs mit dem zu erwartenden Wert in befriedigender Übereinstimmung.

11. Wand- und Gaswirkung.

Nach unserer mitgeteilten Theorie (A 5) ist das Verhältnis der Anzahl der von der Wand- und der Gasstrahlung erzeugten Träger bei festgehaltenem αL und ausreichender Wanddicke der Größe A umgekehrt proportional. Da diese wiederum bei Variation des Wandmaterials — falls der Emissivitätskoeffizient k vom Material unabhängig ist, was wir versuchsweise annehmen — dem jeweiligen Massenabsorptionskoeffizienten für die Wellenstrahlung umgekehrt proportional gesetzt werden kann, so läuft das Wirkungsverhältnis von Wand- und Luftstrahlung bei variiertem Wandmaterial einfach der Massenabsorption des letzteren parallel.

Die folgende Tabelle enthält in ihrer zweiten Kolonne zunächst die für einige Stoffe mit Hilfe der Glockerschen Absorptionsformel¹⁾ berechneten relativen Massenabsorptionswerte. Benutzen wir nun das Ergebnis einer früheren Messung des einen von uns²⁾, nach dem die Wandstrahlenwirkung von Aluminium 0,71 der Wirkung der Luftstrahlung auf der Länge des Wirkungsbereiches $R = 10$ cm betrug, so kann dieses Wirkungsverhältnis für alle angegebenen Stoffe absolut berechnet werden. Das Resultat zeigt Kolonne 3.

Tabelle 5.

Wandsubstanz	Relative Massenabsorption für Wellenstrahlung	Wirkungsverhältnis von Wand- u. Luftstrahlung innerhalb d. Wirkungs- bereichs
Aluminium . .	516	0,71
Papier	100	0,14
Kohle	65	0,09
Paraffin . . .	56	0,08

Die Wandwirkung nimmt danach beim Übergang von Aluminium zu Paraffin sehr erheblich ab. Wie weit hiermit

1) Nach freundlicher brieflicher Mitteilung von Hrn. Glocker an den einen von uns (H.) ist μ_0'/D prop. $\frac{Z^{3,72}}{A}$, wo Z die Ordnungszahl und A das Atomgewicht des betreffenden Elementes ist.

2) H. Holthusen, a. a. O. S. 223 u. Tab. 4.

ein richtiges Bild der tatsächlichen Verhältnisse gewonnen ist, vermag die Untersuchung der Abhängigkeit der Trägererzeugung von der Länge der Maßkammer bei variierter Wandsubstanz, insbesondere die Festlegung der Bedingungen für die unter A 6 betrachtete Wirkungskompensation zu entscheiden.

Nach unserer Theorie findet diese Kompensation nämlich dann statt, wenn das Wirkungsverhältnis von Wand- und Luftstrahlung innerhalb des Wirkungsbereiches den Wert 0,115 annimmt (vgl. Tab. 4). Es wäre darnach, falls die Voraussetzungen unserer Betrachtung zuträfen, zu erwarten, daß der Versuch eine nahe Kompensation mit Papier- oder Kohlewänden angibt, während Aluminiumwände (ausreichender Dicke) deutliches Überwiegen der Wandstrahlung zeigen müßten.

12. Abhängigkeit der Trägerzahl von der Strahllänge bei variiertem Wandmaterial.

Als Meßkammer benutzten wir den bereits früher¹⁾ beschriebenen Zylinderkondensator mit axial hindurchtretendem Wellenbündel, dessen Länge durch einen einschiebbaren Deckel verändert werden konnte, während gleichzeitig die stabförmige Innenelektrode ausgewechselt wurde. Die Kammer befand sich in 1,5 m Entfernung von der Antikathode der Erzeugungsröhre, ihr Durchmesser betrug 20 cm, und die Länge wurde im allgemeinen zwischen 2,4 und 10 cm verändert. Variiert wurden außerdem in getrennten Versuchsreihen die vom Wellenstrahl durchsetzten Wände und die Strahlhärte. Ein relatives Maß für die erzeugte Trägerzahl Σ ist die jeweilige Angabe des mit der Innenelektrode verbundenen Elektrometers. Das Ergebnis der Beobachtungen enthält die umstehende Tab. 6.

Bei der weichsten Wellenstrahlung ist die auf die Längeneinheit des Strahlweges bezogene Trägerzahl in allen Fällen von L nahe unabhängig. Da hier die benutzten Wandabstände alle erheblich größer sind als der mittlere Radius des Wirkungsbereiches der auftretenden Kathodenstrahlen, so ist dies Ergebnis auch nach unserer Theorie (vgl. A. 5 und besonders Tab. 3) zu erwarten.

1) H. Holthusen, a. a. O.

Tabelle 6.

Wände: Alumin. 0,1 mm dick			Papier ¹⁾ 1 mm dick			Paraffin ¹⁾ 2 mm dick		
Länge <i>L</i> cm	Rel. Träger- zahl ²⁾ Σ	Σ/L	<i>L</i> cm	Σ	Σ/L	<i>L</i> cm	Σ	Σ/L
1. Strahlfilter 0,5 mm Aluminium, mittlere Wellenlänge 0,74 Å.E., mittlere Wirkungsweite in Luft $R = 0,83$ cm.								
2,7	3,42	1,13	2,4	2,70	1,13	2,8	3,63	1,30
4,3	5,50	1,27	8,8	9,83	1,12	8,8	11,10	1,27
10,1	12,31	1,21						
2. Strahlfilter 0,4 mm Kupfer, $\lambda_{\text{Mittel}} = 0,3$ Å.E., $R_{\text{Mittel}} = 3,5$ cm.								
2,7	1,75	0,65	2,4	0,98	0,40	2,8	1,34	0,48
4,3	2,71	0,63	8,8	3,35	0,38	8,8	4,21	0,48
10,1	4,44	0,44						
3. Strahlfilter 1 mm Kupfer, $\lambda_{\text{Mittel}} = 0,21$ Å.E., $R_{\text{Mittel}} = 9,7$ cm.								
2,7	2,12	0,78	2,4	1,18	0,49	2,8	1,59	0,57
4,3	3,14	0,73	8,8	3,87	0,44	8,8	4,90	0,56
10,1	5,22	0,52						

Bei den härteren Wellenstrahlen nimmt Σ/L für Aluminiumwände mit wachsendem L erheblich ab, wie es auch die Theorie für den Fall beträchtlicher Wandstrahlung fordert. Daß diese Abnahme allerdings anfänglich relativ wenig und dann stärker in die Erscheinung tritt, könnte vielleicht im Sinne eines späteren Zurücktretens einer anfänglich relativ wirksameren Rückdiffusion gedeutet werden.

Bei Papier tritt der Gang von Σ/L sehr stark zurück, und bei Paraffin ist er vollständig beseitigt. Hier zeigt sich also die Kompensation zwischen Wandwirkungsbeitrag und Gaswirkungsausfall und zwar ist diese, wie der Versuch zeigt, von der Härte der Wellenstrahlung, d. h. auch von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlung, unabhängig, wie dies

1) Papier und Paraffin wurden zur Beseitigung ihrer Oberflächenisolation, die die Trägermessung hätte fälschen können, mit einer dünnen, als Strahlenquelle selbst kaum in Betracht kommenden Graphitschicht bedeckt.

2) Die hierunter mitgeteilten Zahlenwerte sind nur innerhalb jeder zusammenhängenden Versuchsreihe miteinander vergleichbar, da die äußeren Bedingungen der verschiedenen Versuchsreihen nicht immer konstant gehalten waren.

auch die Theorie anzeigt für den Fall, daß die Größe A von der Strahlgeschwindigkeit unabhängig bleibt.

Daß die Kompensation bei Paraffin auftritt, ist ebenfalls in befriedigendem Einklang¹⁾ mit der Theorie, nach welcher sie auf Grund der Tab. 5 von einer bezüglich ihrer Massenabsorption zwischen Papier und Paraffin liegenden Substanz zu erwarten war.

Die experimentelle Prüfung der theoretischen Entwicklungen zeigt darnach, daß deren vereinfachende Voraussetzungen zweifellos zu Ergebnissen von weitgehender Annäherung an die Wirklichkeit führen. Von weitergeführten Versuchen dieser Art wird man eine weitere Auswertung der theoretischen Beziehungen²⁾ und damit einen tieferen Einblick in das behandelte Erscheinungsgebiet erwarten dürfen. Abgesehen davon halten wir die Berücksichtigung der bis jetzt im Obigen erbrachten Kenntnis für eine einwandfreie Auswertung jeder Leitfähigkeitsmessung in von Wellenstrahlung durchsetzten Gasräumen als unerläßlich.

Heidelberg, 18. September 1920.

1) Bei der geringen Homogenität dieser Stoffe ist eine exaktere Übereinstimmung zwischen theoretischer Voraussicht und Versuch überhaupt nicht zu erwarten.

2) Wichtig bleibt insbesondere die nähere Ermittlung der Materialkonstanten A .

(Eingegangen 9. Oktober 1920.)

5. Zur kinetischen Theorie des osmotischen Druckes;

von Karl F. Herzfeld.

Die kinetische Theorie des osmotischen Druckes ist schon oft behandelt worden, besonders die Arbeiten von Lorentz¹⁾ und Jäger²⁾ haben die wichtigsten Punkte aufgeklärt. Doch ist die ganze Frage, wie ich glaube, noch komplizierter als es nach diesen Arbeiten scheinen möchte und daher eine eingehende Erörterung vielleicht nützlich. Die kinetische Theorie hat nämlich zwei Fragen zu beantworten:

1. Warum beträgt der osmotische Druck, d. h. der Überdruck, der auf eine Lösung ausgeübt werden muß, damit sie durch eine halbdurchlässige Membran hindurch mit dem reinen Lösungsmittel im Gleichgewicht steht, $\pi = \frac{RT}{V}$?

Diese Frage ist von Jäger ausführlich beantwortet. Dagegen soll hier besonders die zweite Frage besprochen werden, welche lautet:

2. Welches ist der Mechanismus, der das Lösungsmittel in die Lösung treibt, wenn beide unter gleichem Drucke stehen?

§ 1. Der Druck in einer reinen Flüssigkeit.

Wir wollen zuerst im Anschluß an Jäger den thermischen Druck auf eine beliebige Fläche definieren; wir verstehen darunter jene Bewegungsgröße, welche von den Molekülen, die mit dieser Fläche zusammenstoßen, in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgetragen wird. Ein Stoß eines Moleküles auf die Fläche tritt dann ein, wenn der Mittelpunkt

1) H. A. Lorentz, Arch. neerl. **25**. S. 107. 1892; Ges. Abh. Leipzig 1904. S. 175 ff.

2) G. Jäger, Zeitschr. f. phys. Chem. **93**. S. 257. 1919; Ann. d. Phys. **54**. S. 463. 1914; vgl. ferner O. Stern, Zeitschr. f. phys. Chem. **81**. S. 441. 1912.

des Moleküles eine um den Molekularhalbmesser von der gestoßenen Fläche abstehende Referenzfläche passiert. Wenn die Fläche keinerlei Kräfte auf die Moleküle ausübt, was wir vorderhand annehmen wollen, ist dieser thermische Druck die einzige Kraft, die die Fläche von der einen Seite her erfährt. Im Inneren der Flüssigkeit¹⁾ ist dieser thermische Druck überall gleich. Gegen die Oberfläche zu nimmt er ab. Infolge der van der Waalschen Kräfte ist ja die Flüssigkeit von einer Kapillarschicht umgeben, innerhalb deren die Dichte von dem Wert im Inneren zu dem Wert im Dampf abnimmt. Entsprechend nimmt auch der thermische Druck innerhalb der Kapillarschicht ab; wir wollen den thermischen Druck, der auf die Oberfläche ausgeübt wird, als thermischen Grenzdruck bezeichnen. Für die Art, wie sich der thermische Druck mit den Kräften, die auf die Flüssigkeit ausgeübt werden, ändert, gilt folgendes: Wir denken uns ein Volumelement dv von unendlich dünnen starren Wänden umschlossen. Dann seien die Kräfte in der x -Richtung auf die Flüssigkeit in diesem Volumelement $\rho X dv$. Die Kraft, die der thermische Druck in der x -Richtung auf die Oberfläche des Elementes ausübt, ist

$$+ \frac{\partial p}{\partial x} dv,$$

wie man ganz in der gleichen Weise sieht, in welcher die hydrodynamischen Grundgleichungen gewöhnlich abgeleitet werden.²⁾ Es gilt also für den thermischen Druck

$$(1) \quad + \frac{\partial p}{\partial x} = X \rho.$$

Diese Gleichung ist mit der gewöhnlichen hydrodynamischen Bewegungsgleichung identisch, nur bedeutet p hier den inneren thermischen Druck und nicht den hydrostatischen Druck. Es sei nun die van der Waalsche Kraft, durch welche eine unendlich große Schicht von der Dicke dr und der Dichte ρ_1 ein

1) Wir bezeichnen im folgenden alle Größen, die sich auf das Lösungsmittel beziehen, mit dem Index 1, die sich auf den gelösten Stoff beziehen mit dem Index 2. Ein Strich bedeutet das reine Lösungsmittel, zwei Striche die Lösung, i das Innere, M die halbdurchlässige Membran, S den Stempel. Wenn wir ausdrücken wollen, daß die in einer Formel auftretende Dichte in der ganzen Flüssigkeit bis an die Oberfläche konstant ist, so wird die betreffende Größe überstrichen.

2) Vgl. z. B. W. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 15. Leipzig 1907.

Mol in der Entfernung, r nach innen zieht, $\varrho_1 f_{11}(r)$, dann ist die Gesamtkraft, durch welche ein Mol in der Entfernung R von der Oberfläche nach innen gezogen wird,

$$\int_{-\infty}^0 \varrho_1(r) f_{11}(r - R) dr.$$

Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, so bekommen wir¹⁾ für die Änderung des thermischen Druckes in der Kapillarschicht

$$(2) \quad + \frac{\partial p}{\partial R} = \varrho_1(R) \int_{-\infty}^0 \varrho_1(r) f_{11}(r - R) dr,$$

das gibt integriert folgende Gleichung für den thermischen Grenzdruck

$$(3) \quad p_s = p_i - \int_{-\infty}^0 dR \varrho_1(R) \int_{-\infty}^0 \varrho_1(r) f_{11}(r - R) dr = p_i - K_{11}.$$

Die Größe K_{11} wollen wir den Kohäsionsdruck nennen. Um sie ist der thermische Druck im Inneren größer als der thermische Grenzdruck (Fig. 1). Sie ist die Arbeit, welche das

Herausschaffen der *Volumeneinheit* aus dem Inneren der Flüssigkeit erfordert. Die äußere Kraft, die wir auf einen Stempel ausüben müssen, ist pro qcm = dem thermischen Grenzdruck. Drücken wir die Flüssigkeit zusammen, so ändert sich der thermische Druck sehr stark, dagegen der Kohäsionsdruck

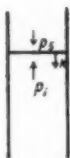


Fig. 1.

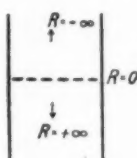


Fig. 2.

sehr wenig (proportional dem Quadrat der Dichte), also der thermische Grenzdruck sehr stark.

Übt die Wand irgendwelche Kräfte auf die Flüssigkeit aus, z. B. Anziehungskräfte, so nimmt dadurch der Kohäsionsdruck ab, die Dichte an der Wand und damit der thermische Grenzdruck zu, und zwar um die Abnahme des Kohäsionsdruckes. Gerade ebensoviel betragen aber die Kräfte, mit welchen jetzt die Flüssigkeitsmoleküle die Wand nach innen

1) In der Oberfläche der Flüssigkeit ist $R = 0$, $R = \infty$ liegt im Innern derselben (Fig. 2).

ziehen, so daß die äußere Kraft, welche auf die Wand ausgeübt werden muß, dadurch nicht geändert wird, wie es ja auch die Thermodynamik verlangt. Würden die Anziehungskräfte der Wand die gegenseitigen Anziehungskräfte der Flüssigkeitsmoleküle gerade aufheben, so bliebe die Dichte bis an die Wand konstant.¹⁾ K hat dann den Wert

$$(4) \quad \bar{K} = \int_{+\infty}^0 \bar{\varrho}_1 dR \int_{+\infty}^0 \bar{\varrho}_1 f_{11}(r - R) dr.$$

Ist die normale Dichte in einer freien Kapillarschicht, die von Ort zu Ort variiert, ϱ_1 , so muß gelten²⁾

$$(5) \quad \bar{K}_{11} = K_{11} = \int_{+\infty}^0 \varrho_1(R) dR \int_{+\infty}^0 \varrho_1(r) f_{11}(r - R) dr.$$

§ 2. Der osmotische Druck in Lösungsmitteln, die keine Anziehung auf den gelösten Stoff ausüben.

Diesen Fall hat Jäger ausführlich behandelt, wir wollen ihn aber zur Überleitung auf das Folgende noch besprechen. Übt die Membran keinerlei Kräfte auf den gelösten Stoff aus (wirkt also einfach als Sieb), so bleibt die Dichte der gelösten Moleküle bis an sie heran konstant. Im Gleichgewicht müssen durch die Membran gleichviel Lösungsmittelmoleküle nach links wie nach rechts durchgehen, d. h. der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels an der Membran muß in der Lösung wie im reinen Lösungsmittel gleich sein. Die Kohäsionsdrucke des Lösungsmittels sind ebenfalls im reinen Lösungsmittel und in der Lösung fast gleich (ein kleiner Unterschied rührt von den verschiedenen Dichten in beiden Fällen her, siehe den nächsten Paragraphen), infolgedessen sind auch die thermischen

1) In diesem Fall ist der thermische Grenzdruck also gleich dem vollen inneren thermischen Druck, da ein Molekül kräftefrei an die Wand gebracht werden kann. Die Wand wird mit dem Kraft \bar{K} pro cm^2 nach innen gezogen.

2) Bei einem Stempel ist die Oberfläche natürlich von selbst festgelegt. Eine freie Oberfläche, auf die ein fremdes Gas drückt, erfordert eine längere Überlegung, doch können wir hier gerade (5) als Definition für ihre Lage ansehen. Die Anziehungskräfte erstrecken sich über sie hinaus und bewirken die Abnahme des thermischen Druckes vom Wert des äußeren Druckes p auf den Dampfdruck.

Drucke im Inneren von Lösungsmittel und Lösung gleich (Fig. 1). Wie groß sind nun die Kräfte an den beiderseitigen Stempeln, wenn Gleichgewicht herrschen soll? Es möge auch der Stempel keine Kräfte auf den gelösten Stoff ausüben, dann erfährt der Stempel im reinen Lösungsmittel einen thermischen Grenzdruck von Seiten desselben gleich dem inneren thermischen Druck weniger dem Kohäsionsdruck. $p_{1s}' = p_{1i}' - K_{11}'$ auf der Lösungsseite erfährt der Stempel einen thermischen Grenzdruck von Seite des Lösungsmittels, der gleich dem eben besprochenen ist, da innerer thermischer Druck und Kohäsionsdruck in Lösung und reinem Lösungsmittel gleich sind. Hierzu kommt noch der thermische Grenzdruck des gelösten Stoffes, der, wie Jäger für diesen Fall nachgewiesen hat, gleich RT/V ist. Die Gesamtkraft auf diesen Stempel ist also

$$p_{1s}' + \frac{RT}{V}$$

Der Druck, der auf den rechten Stempel mehr als auf den linken ausgeübt werden muß, der osmotische Druck, ist also hier $\frac{RT}{V}$ = dem thermischen Grenzdruck des gelösten Stoffes. Würde der Stempel auf den gelösten Stoff Kräfte ausüben, so würden die Betrachtungen vom Schluß des vorherigen Paragraphen anzuwenden sein, es würde die Dichte und der thermische Grenzdruck des gelösten Stoffes steigen, um ebensoviel aber würde der Stempel nach innen gezogen. Auch auf die Membran wird als einseitiger Druck der osmotische Druck ausgeübt, unabhängig von etwaigen Kräften zwischen Membran und gelöstem Stoff.

Denken wir uns nun die Membran abgesperrt und entlasten den Stempel um den osmotischen Druck, so daß der Druck gleich dem normalen äußeren Druck p wird, so dehnt sich die Flüssigkeit ein wenig aus, wobei der osmotische Druck und der Kohäsionsdruck kaum merklich geändert werden, während der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels stark abnimmt und zwar solange, bis er gleich dem äußeren Druck weniger dem osmotischen Druck wird. Der Grund, warum der osmotische Druck sich in einer freistehenden Lösung nicht an den Gefäßwänden merkbar macht, liegt also darin, daß eine solche gegenüber dem Gleichgewichtszustand mit dem reinen Lösungsmittel (nicht aber im Vergleich mit dem Lösungsmittel

selbst) gedehnt ist.¹⁾ Würden wir jetzt die Sperrung der Membran wieder aufheben, so wäre an ihr der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner, das reine Lösungsmittel würde also eindringen. *Die Ursache dieses Eindringens ist, daß der osmotische Druck auf den Stempel die Lösung gedehnt hat.*

§ 3. Das Lösungsmittel übt auf den gelösten Stoff Anziehungskräfte aus. (Fig. 3.)

In dem eben besprochenen Fall fehlender Kräfte zwischen Lösungsmittel und gelöstem Stoff wäre der Dampfdruck des letzteren über der Lösung gleich dem osmotischen Druck. Da

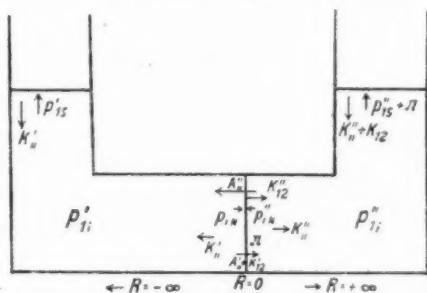


Fig. 3.

er im allgemeinen sehr viel kleiner ist, müssen starke Anziehungskräfte zwischen beiden angenommen werden.²⁾ Wir betrachten wieder das Gleichgewicht zwischen Lösung und reinem Lösungsmittel an einer unendlich dünnen, kräftefreien Membran. Es befinde sich etwa die Lösung rechts. Bis an die Membran heran sind dann die gelösten Teilchen gleichmäßig verteilt. (Genau genommen ist dies nicht ganz richtig, weil die Dichte des Lösungsmittels links und rechts von der Membran und daher auch die Anziehungskräfte desselben etwas verschieden sind, aber dieser Unterschied ist der Konzentration des gelösten Stoffes proportional, seine Wirkung auf diesen also dem Quadrat dieser Konzentration, solche Glieder vernachlässigen wir aber konsequent.) Auf ein Mol des Lösungsmittels an der Lösungsseite der Membran werden nun folgende Kräfte ausgeübt:

1) Vgl. G. A. Hulett, Zeitachr. f. phys. Chem. 42, S. 353. 1902.

2) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 48, S. 369. 1915.

1. Die Anziehung des Lösungsmittels in der Lösung, sie ergibt den Kohäsionsdruck des Lösungsmittels K_{11}''

$$(6) \quad K_{11}'' = \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1}'' dR \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1}'' f_{11}(r-R) dr.$$

Hier ist die Integration nur bis zur Membran zu erstrecken, da auf der anderen Seite ja schon das reine Lösungsmittel beginnt, dafür ist die Dichte bis an die Wand konstant, daher hat das Integral nach (5) den Wert K_{11}'' .

2. Die Kräfte, die vom reinen Lösungsmittel auf der anderen Seite der Membran ausgeübt werden, und das Integral

$$(7) \quad A_{11}'' = \int_{+\infty}^0 \overline{\varrho_1}'' dR \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1}' f_{11}(r-R) dr$$

ergeben, um welches der Kohäsionsdruck zu vermindern ist.

3. Die Anziehungskräfte von Seiten der Moleküle des gelösten Stoffes, die, wie erwähnt, bis zur Membran gleichmäßig verteilt sind. Die Arbeit bei Heranschaffen eines Mols Lösungsmittels aus der Lösung an die Wand gegen diese Kräfte ergibt einen „gegenseitigen Kohäsionsdruck“ K_{12}

$$(8) \quad K_{12} = \int_{+\infty}^0 \overline{\varrho_1}'' dR \int_{+\infty}^0 \overline{\varrho_2} f_{12}(r-R) dr.$$

Die Integration ist nur bis $R=0$, d. h. bis an die Wand aus den gleichen Gründen wie bei Punkt 1 zu erstrecken. Für den thermischen Grenzdruck an der Membran ergibt sich daher die Beziehung

$$(9) \quad p_{1M}'' = p_{1i}'' - (K_{11}'' - A_{11}'' + K_{12}'').$$

Er unterscheidet sich also vom inneren thermischen Druck um eine Größe gleich dem Kohäsionsdruck des Lösungsmittels in der Lösung + dem gegenseitigen Kohäsionsdruck weniger der Anziehung des reinen Lösungsmittels auf der anderen Seite.

Entsprechend wirkt auf der linken Seite der Membran auf ein Mol Wasser

1. der Kohäsionsdruck des reinen Lösungsmittels

$$(6') \quad K_{11}' = \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1}' dR \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1}' f_{11}(r-R) dr.$$

2. Die Kräfte, die vom Lösungsmittel auf der rechten Seite der Membran auf das reine Lösungsmittel links ausgeübt werden. Sie ergeben das Integral

$$(7') \quad A_{11}' = \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1'} dR \int_{+\infty}^0 \overline{\varrho_1''} f_{11}(r-R) dr.$$

Da aber die Dichten bis an die Membran heran konstant sind, können wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und erhalten

$$A_{11}'' = A_{11}'.$$

d. h. die Wirkung des Lösungsmittels rechts von der Membran auf das Lösungsmittel links von der Membran = der Wirkung des Lösungsmittels links von der Membran auf das rechts befindliche.

9. Die Anziehungskräfte der rechts von der Membran befindlichen Moleküle des gelösten Stoffes, welche eine Verminderung des Kohäsionsdruckes um

$$(8') \quad K_{12}' = \int_{-\infty}^0 \overline{\varrho_1'} dR \int_{+\infty}^0 \overline{\varrho_2} f_{12}(r-R) dr$$

bewirken. Da, wie schon erwähnt, die Dichten des Lösungsmittels links und rechts sich nur um einen der Konzentration des gelösten Stoffes proportionalen Wert unterscheiden, in unserem Ausdruck aber die Konzentration selbst als Faktor steht, können wir in Formel (8') die Dichte des reinen Lösungsmittels durch die des Lösungsmittels in der Lösung ersetzen und erhalten dann $K_{12}' = K_{12}'' = K_{12}$.

Der thermische Grenzdruck des reinen Lösungsmittels an der Membran wird daher

$$(9') \quad p_{1M}' = p_{11}' - (K_{11}' - A_{11}' - K_{12}).$$

Damit Gleichgewicht herrscht, müssen die thermischen Grenzdrucke von reinem Lösungsmittel und Lösungsmittel in der Lösung gleich sein, es gilt also die Gleichung für die inneren thermischen Drucke

$$(10) \left\{ \begin{aligned} p_{11}' - (K_{11}' - A_{11}' - K_{12}) &= p_{11}'' - (K_{11}'' - A_{11}' + K_{12}) \\ p_{11}'' &= p_{11}' + 2K_{12} + (K_{11}'' - K_{11}'), \end{aligned} \right.$$

d. h. es stellt sich infolge der Anziehung zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel im Inneren der Lösung ein erhöhter thermischer Druck

$$p_{1i}' + 2K_{12} + (K_{11}'' - K_{11}')$$

ein.

Auf den Stempel über dem reinen Lösungsmittel wird natürlich der äußere Druck $p = p_{1i}' - K_{11}'$ ausgeübt. Um den Druck auf den Stempel über der Lösung zu berechnen, werden wir zuerst einen etwas umständlichen, aber mathematisch strengen Weg einschlagen und dann unser Resultat anschaulich, aber unschärfer ausdrücken. Wir denken uns zuerst, es möge der Stempel solche Kräfte auf den gelösten Stoff ausüben, daß er die Anziehungskräfte des Lösungsmittels gerade kompensiert. Dann sind die Moleküle des gelösten Stoffes bis an den Stempel heran gleichmäßig verteilt. Der Kohäsionsdruck des Lösungsmittels in der Lösung besteht dann aus zwei Teilen, nämlich dem eigenen Kohäsionsdruck des Lösungsmittels K_{11}'' und dem gegenseitigen Kohäsionsdruck von Lösungsmittel und gelöstem Stoff K_{12} . Der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels auf den Stempel ist daher gleich

$$(11) \quad p_{1s}'' = p_{1i}'' - K_{11}'' - K_{12}.$$

Ferner wirkt auf den Stempel noch der volle osmotische Druck des gelösten Stoffes als thermischer Grenzdruck desselben (infolge der gleichmäßigen Dichte). Endlich wird der Stempel durch die eingeführten Anziehungskräfte auf den gelösten Stoff mit der Gesamtkraft K_{12} nach innen gezogen. Als äußerer Druck auf den Stempel resultiert daher

$$p_s'' = p_{1i}'' - K_{11}'' - K_{12} + \frac{RT}{V} = p_{1i}' - K_{11}' + \frac{RT}{V} = p_s' + \frac{RT}{V}.$$

Die Erhöhung des inneren thermischen Druckes wird daher teilweise durch den infolge der Anziehung des gelösten Stoffes erhöhten Kohäsionsdruck des Lösungsmittels und teilweise durch die Anziehungskräfte des Stempels kompensiert. Der äußere Druck auf den Stempel über der Lösung ist wieder um die Größe RT/V größer als der auf den Stempel über dem damit im Gleichgewicht befindlichen reinen Lösungsmittel, gerade so wie im vorigen Abschnitt, wo die Anziehungskräfte fehlten.

Übt nun der Stempel keine Kräfte auf die Moleküle des gelösten Stoffes auf, so werden sie infolge der Anziehung des Lösungsmittels nach innen zurückgezogen (gegenseitige Anziehung der gelösten Moleküle berücksichtigen wir nicht) und zwar gehorcht ihr thermischer Grenzdruck der Formel nach (31)

$$(12) \quad p_2 - \frac{RT}{V} = - \int_{+\infty}^0 \varrho_2(R) dR \int_{+\infty}^0 \varrho_1(r) f_{12}(r-R) dr = -K,$$

er sinkt also um die Größe K , die im Grenzfall RT/V wird.¹⁾ Dafür üben sie auf das Lösungsmittel einen nach außen gerichteten weiteren Zug von der gleichen Größe K aus, um sie sinkt der Kohäsionsdruck des Lösungsmittels und steigt der thermische Grenzdruck desselben, so daß der gesamte Druck unverändert bleibt.

Das bedeutet kurz folgendes: Wir haben zwei Wirkungen des gelösten Stoffes zu unterscheiden. Denken wir uns zuerst, seine Moleküle hätten keine Wärmebewegung, so würden sie sich in einer Gleichgewichtslage in der Lösung anordnen, so daß eine dünne Schicht (bestimmt durch den Radius der Wirkungssphäre) an der Oberfläche frei bliebe. Das würde eine Erhöhung des Kohäsionsdruckes und damit des inneren thermischen Druckes des Lösungsmittels bedeuten, die sich von selbst infolge des Gleichgewichtes an der Membran einstellt; denn dieses ergibt bei ungleichem thermischen Grenzdruck ein Nachströmen von Lösungsmittel, bis der thermische Grenzdruck den alten Wert hat. Erhält nun der gelöste Stoff seine Wärmebewegung, so bewirkt diese, daß er über seine Gleichgewichtslage hinaus näher an die Oberfläche herankommt, desto näher, je stärker die Wärmebewegung ist, ganz so, wie nach Perrin²⁾ sich Emulsionen über den Boden des Gefäßes sich erheben. Dieses Hinaustreten über die Gleich-

1) Es ist nämlich $\varrho_2 = \varrho_1 e^{-\frac{\varphi}{RT}}$, wo

$$\varphi = \int_{-\infty}^R dR \int_{+\infty}^0 dr \varrho_1''(r) f_{12}(r-R)$$

die Arbeit ist, die zur Überführung von 1 Mol gelösten Stoffes aus dem Innern in die Entfernung R von der Oberfläche nötig ist. Dann wird

$$K = RT(\varrho_2 - \varrho_1).$$

2) J. Perrin, *Compt. rend.* 146. S. 967. 1908; 147. S. 530. 1908.

gewichtslage bewirkt dann einen Zug auf das Lösungsmittel nach außen, der gleich $R T/V$ ist, und sich in einem um diese Größe erhöhten thermischen Grenzdruck des Lösungsmittels äußert.

Man kann das kurz so ausdrücken, daß infolge der Anziehungskräfte der gelöste Stoff den osmotischen Druck nicht mehr direkt auf die äußerste Oberfläche, sondern auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels ausübt, ohne daß der Betrag desselben dadurch geändert würde. Mit anderen Worten: die Gesamtgröße des äußeren Druckes oder der gesamte thermische Grenzdruck an der Oberfläche ist unabhängig von der Größe der Anziehungskräfte, sie ändern nur die Art, wie er sich auf den thermischen Grenzdruck des Lösungsmittels und den thermischen Grenzdruck des gelösten Stoffes verteilt.

Wir denken uns jetzt wieder die Membran abgesperrt und entlasten den Stempel über der Lösung um den Betrag des osmotischen Druckes, dann dehnt sich ganz wie in § 2 die Flüssigkeit solange, bis der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels den Wert p angenommen hat. Diese Dehnung kommt also dadurch zustande, daß der gelöste Stoff durch seinen Druck gegen die Kapillarschicht das Lösungsmittel vor sich her schiebt. Bringen wir nun die Lösung wieder durch die halbdurchlässige Membran mit dem reinen Lösungsmittel von gleichem Druck in Berührung, so ist an der Membran der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner (weil dort der Gesamtdruck p teilweise vom Grenzdruck des gelösten Stoffes herrührt), infolgedessen dringt Lösungsmittel ein.

Wir können das so auffassen, als ob die Stöße der gelösten Moleküle auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels an der freien Oberfläche (nicht an der Membran) diese vor sich herschieben würden. Die Kohäsionskräfte des Lösungsmittels bewirken dann das Nachziehen desselben durch die Membran, sonst würde die Flüssigkeitssäule einfach reißen.

Daß sich der osmotische Druck auf die Gefäßwände in einer freistehenden Lösung nicht bemerkbar macht, hat den gleichen Grund wie in § 2.

Bisher haben wir eine unendlich dünne Membran angenommen; wenn sie Kräfte auf den gelösten Stoff ausübt, ändert sich an unseren Betrachtungen gar nichts, solange der gelöste Stoff direkt durch Stöße und durch diese Kräfte auf

die Wand wirkt. Dagegen erfordert der von H. A. Lorentz¹⁾ besprochene Fall einer dicken, kräftefreien Membran mit engen Kanälen eine kurze Erörterung. In diesem Fall ist nämlich das reine Lösungsmittel vom gelösten Stoff zu weit entfernt, um auf ihn zu wirken, dieser zieht sich daher von der Membran ins Innere der Lösung zurück, die Verhältnisse werden auch an der Lösungsseite der Membran so, wie wir sie für den Stempel eben geschildert haben. Dann herrscht (Fig. 4) an dieser Seite *a* der Membran ein erhöhter thermischer Grenzdruck des Lösungsmittels, und zwar im Grenzfall, in dem keine gelösten Moleküle mehr an die Wand kommen, ein um $R T/V$ erhöhter Grenzdruck. Innerhalb der Kanäle nimmt aber infolge der Anziehungskräfte des Gelösten dieser thermische Druck ab,

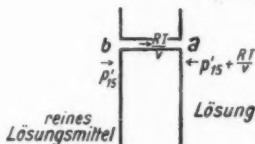


Fig. 4.

bis er an der Stelle *b*, wo die Kanäle ins reine Lösungsmittel münden, auf p_{1s}' gesunken ist. Daß die Anziehungskräfte gerade eine Verminderung um $R T/V$ bewirken, ersieht man aus den Schlußfolgerungen bei Lorentz. Der Mechanismus des Nachströmens im Fall der Entlastung des Stempels über der Lösung ist nun folgender: Haben wir vor der Entlastung bei *b* gesperrt, so ist dort der thermische Grenzdruck des Lösungsmittels kleiner als im reinen Lösungsmittel, die Verhältnisse liegen genau so wie früher besprochen. Haben wir dagegen bei *a* abgesperrt, so herrscht zwar dort in der Lösung ein thermischer Grenzdruck des Lösungsmittels $= p_{1s}'$, dagegen besteht in dem mit dem reinen Lösungsmittel verbundenen Kanal bei *a* ein höherer Grenzdruck, der ein Nachströmen bewirkt. Bloß in diesem Fall kann man sagen, daß die Anziehungskräfte direkt das reine Lösungsmittel hereinziehen.

§ 4. Der Binnendruck.

Wir haben in § 3 gesehen, daß der thermische Druck des Lösungsmittels in der Lösung beim äußeren Druck $p + \pi$ um $2K_{12} + K'' - K'$ größer ist als der im reinen Lösungsmittel beim äußeren Druck p . Bei gleichem äußeren Druck gilt also

1) H. A. Lorentz, a. a. O. S. 189.

angenähert für den inneren thermischen Druck des Lösungsmittels in der Lösung

$$p_i'' = p_i' + 2K_{12} + K'' - K' - \pi.$$

Tatsächlich hat Tammann¹⁾ schon vor längerer Zeit festgestellt, daß sich viele Eigenschaften der Lösungen durch die Annahme eines erhöhten thermischen Druckes erklären lassen. Doch stimmen seine Werte nicht mit denen überein, die wir erwarten sollten. Es ist nämlich

$$2K_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varrho_1'}(R) dR \int_0^{\infty} \overline{\varrho_2}(r) f_{12}(r-R) dr$$

$$\overline{\varrho_1'} = \text{const} \quad \overline{\varrho_2} = \text{const} \quad R > 0$$

$$\overline{\varrho_2} = 0 \quad R < 0.$$

Betrachten wir andererseits das Integral

$$(13) \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} dR \int_0^{\infty} \overline{\varrho_1'}(r) f_{12}(r-R) dr.$$

Es ist die Arbeit²⁾, die zur Entfernung von 1 Mol. gelösten Stoffes aus der Lösung nötig ist. Hier ist $\overline{\varrho_1'}$ bis zur Kapillarschicht konstant, in ihr bis 0 abnehmend, für $R < 0$ Null. Wenn f mit großem $R - r$ genügend stark verschwindet, so sieht man leicht, daß wir ohne merkbaren Fehler im Integral $\overline{\varrho_1'}$ für alle $R > 0$ konstant setzen können.³⁾

Dann wird also

$$\varrho_2 J = 2K_{12}.$$

Aus ähnlichen Überlegungen sieht man, daß

$$K'' = \lambda_0 \frac{\varrho''^2}{\varrho_0}, \quad K' = \frac{\varrho'^2}{\varrho_0} \lambda_0,$$

wo λ_0 die Verdampfungswärme bei der Dichte ϱ_0 ist. Also

$$(14) \quad p_i'' - p_i' = \varrho_2 J + \lambda_0 \frac{\varrho''^2 - \varrho'^2}{\varrho_0} - \pi = \varrho_2 J + 2\lambda_0(\varrho'' - \varrho') - \pi.$$

1) G. Tammann, Über die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und Eigenschaften der Lösungen. Hamburg 1907.

2) Wir vernachlässigen dabei die Temperaturabhängigkeit.

3) Wie es in der Kapillaritätstheorie üblich ist.

Andererseits sollte man erwarten, daß J gleich der „Hydratationswärme“¹⁾ W des Salzes wäre, also der Energie, die beim Übergang beider Ionen aus dem Gas in die Lösung frei wird, weniger der Energie, die durch die hierbei erfolgte Volumänderung des Wassers frei wird. Wäre diese letztere in der ganzen Lösung gleichmäßig (d. h. nicht um die Ionen als Kerne konzentriert), so ergäbe sich hierfür

$$\frac{\partial U}{\partial V} \frac{q'' - q'}{q'^2}.$$

Also

$$(15) \quad p_i'' - p_i' + \pi - 2\lambda_0(q'' - q') = q_2 J = W - \frac{\partial U}{\partial V} \frac{q'' - q'}{q'^2}.$$

Bezieht man alles auf ein Mol gelösten Salzes, so wird dies

$$\frac{p_i'' - p_i' + \pi}{q_2} - \frac{q'' - q'}{q_2} \left(2\lambda_0 - \frac{\partial U}{\partial V} \frac{1}{q'^2} \right) = W.$$

Das kann man übersichtlicher machen, indem man durch $R T$ dividiert und $\pi = R T q_2$ benützt.

$$(16) \quad \frac{W}{RT} = \frac{p_i'' - p_i'}{\pi} + 1 - \left(2\lambda_0 - \frac{\partial U}{\partial V} \frac{1}{q'^2} \right) \frac{1}{RT} \frac{q'' - q'}{q_2}.$$

Nun zeigt man leicht, daß der Klammerausdruck nur einen kleinen Wert hat. Dann folgt, daß sich die Hydratationswärme zu $R T$ verhalten soll wie die von Tammann bestimmten Drucke zum osmotischen Druck weniger 1. Die ersteren sind aber in der Größenordnung 600 Atm., der letztere $22\frac{1}{2}$ Atm., das Verhältnis also ~ 30 ; für W würde sich daher

$$\sim 0,6 \cdot 30 \text{ Kal.} \sim 18 \text{ Kal.}$$

ergeben, während die Hydratationswärmen die Größenordnung 180 Kal. haben. Will man daher an der Identifikation der von Tammann bestimmten Drucken mit unseren festhalten, so muß eine große Wärmemenge bei der Kontraktion des Wassers um die Ionen frei werden.

Zusammenfassung.

Es wird zuerst besprochen, wie der äußere Druck in einer reinen Flüssigkeit zustande kommt, dann im Anschlusse an G. Jäger, wie diese Betrachtungen auf eine Lösung zu über-

1) K. Fajans, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 21. S. 549. 709. 1919.

tragen sind, wenn Anziehungskräfte zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel fehlen. Im Hauptteil der Arbeit wird dann gezeigt, daß das Vorhandensein solcher Anziehungskräfte den osmotischen Druck nicht ändert, weil sie nur einen Teil der Wirkung, welche ohne sie der gelöste Stoff direkt auf die Oberfläche ausüben würde, auf das Lösungsmittel übertragen. Bei genügend starken Anziehungskräften wirkt der kinetische Druck des gelösten Stoffes auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels statt auf die freie Oberfläche. Dieser Druck ist es auch, welcher die Oberfläche fortschiebt und damit das Nachdringen von Lösungsmittel durch eine halbdurchlässige Membran verursacht.

Die Anziehungskräfte bewirken eine Erhöhung des inneren Druckes der Lösung, doch stimmen die von Tammann erhaltenen Werke nicht mit denen überein, welche man nach der gemessenen Hydratationswärme erwarten sollte.

(Eingegangen 6. November 1920.)

**6. Wärmeausdehnung und Kompressibilität
von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen;
von W. Seitz.**

(III. Teil.)

Die theoretische Auswertung der Messungen, welche ich in den Jahren 1912 bis 1915 gemeinsam mit den Herren G. Lechner und H. Altermann ausgeführt habe (Ann. d. Phys. **49**. S. 85—92 und 93—115, 1916), war bereits am Schlusse des 2. Teils unserer Arbeit angekündigt, ihre Publikation hat sich aber durch äußere Umstände bis heute verzögert.

Zunächst wurde geprüft, wie weit in dem Gebiet von 0 bis 1000 Atm. und von 163° bzw. 173° bis 283° abs. Temp. die untersuchten Flüssigkeiten Isopentan, Äthyläther, Methylalkohol, Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände genügen, und zwar wurde hierbei der Weg eingeschlagen, den C. Raveau¹⁾ angegeben hat, d. h. es wurden auf durchscheinendem Koordinatenpapier die Isothermen aufgezeichnet, wobei die Briggschen Logarithmen des Druckes die Ordinaten, jene des Volumens die Abszissen bildeten, und nun versucht, die Kurvenscharen zweier Flüssigkeiten durch Parallelverschiebung miteinander zur Deckung zu bringen.

Bei Pentan und Äther gelingt dies vorzüglich. Die größten Abweichungen vom Parallelismus zusammenfallender Kurven, die höchstens ein Promille des Volumens ausmachen, dürften aber doch die wahrscheinliche Fehlergrenze der Messungen etwas überschreiten. So scheint bei den höchsten Drucken die reduzierte Volumenabnahme zwischen übereinstimmenden Drucken für Pentan etwas größer als für Äther zu sein. Bekanntlich sollen nach der van der Waals'schen Theorie sich in korrespondierenden Punkten die Größen P , v , T für die

1) C. Raveau, Journ. de Phys. **3**. S. 6. 432—439. 1897.

tragen sind, wenn Anziehungskräfte zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmittel fehlen. Im Hauptteil der Arbeit wird dann gezeigt, daß das Vorhandensein solcher Anziehungskräfte den osmotischen Druck nicht ändert, weil sie nur einen Teil der Wirkung, welche ohne sie der gelöste Stoff direkt auf die Oberfläche ausüben würde, auf das Lösungsmittel übertragen. Bei genügend starken Anziehungskräften wirkt der kinetische Druck des gelösten Stoffes auf die Kapillarschicht des Lösungsmittels statt auf die freie Oberfläche. Dieser Druck ist es auch, welcher die Oberfläche fortschiebt und damit das Nachdringen von Lösungsmittel durch eine halbdurchlässige Membran verursacht.

Die Anziehungskräfte bewirken eine Erhöhung des inneren Druckes der Lösung, doch stimmen die von Tammann erhaltenen Werke nicht mit denen überein, welche man nach der gemessenen Hydratationswärme erwarten sollte.

(Eingegangen 6. November 1920.)

**6. Wärmeausdehnung und Kompressibilität
von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen;
von W. Seitz.**

(III. Teil.)

Die theoretische Auswertung der Messungen, welche ich in den Jahren 1912 bis 1915 gemeinsam mit den Herren G. Lechner und H. Altermum ausgeführt habe (Ann. d. Phys. 49. S. 85—92 und 93—115, 1916), war bereits am Schlusse des 2. Teils unserer Arbeit angekündigt, ihre Publikation hat sich aber durch äußere Umstände bis heute verzögert.

Zunächst wurde geprüft, wie weit in dem Gebiet von 0 bis 1000 Atm. und von 163° bzw. 179° bis 283° abs. Temp. die untersuchten Flüssigkeiten Isopentan, Äthyläther, Methylalkohol, Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände genügen, und zwar wurde hierbei der Weg eingeschlagen, den C. Raveau¹⁾ angegeben hat, d. h. es wurden auf durchscheinendem Koordinatenpapier die Isothermen aufgezeichnet, wobei die Briggschen Logarithmen des Druckes die Ordinaten, jene des Volumens die Abszissen bildeten, und nun versucht, die Kurvenscharen zweier Flüssigkeiten durch Parallelverschiebung miteinander zur Deckung zu bringen.

Bei Pentan und Äther gelingt dies vorzüglich. Die größten Abweichungen vom Parallelismus zusammenfallender Kurven, die höchstens ein Promille des Volumens ausmachen, dürften aber doch die wahrscheinliche Fehlergrenze der Messungen etwas überschreiten. So scheint bei den höchsten Drucken die reduzierte Volumenabnahme zwischen übereinstimmenden Drucken für Pentan etwas größer als für Äther zu sein. Bekanntlich sollen nach der van der Waalsschen Theorie sich in korrespondierenden Punkten die Größen P , v , T für die

1) C. Raveau, Journ. de Phys. 3. S. 6. 432—439. 1897.

beiden Substanzen wie die kritischen Größen P_* , v_* , T_* verhalten. Bei der günstigsten Überlagerung der beiden Systeme ist

$$\frac{P_{\text{Äther}}}{P_{\text{Pentan}}} = 1,15,$$

während das Verhältnis des kritischen Druckes

$$\frac{P_{* \text{Äther}}}{P_{* \text{Pentan}}}$$

nach den in Landolts Tabellen angegebenen Zahlen zwischen 1,07 und 1,21 liegt.

Die Isotherme $T = 182^\circ$ (abs. Temp.) des Pentans deckt sich mit der Isotherme $T = 183$ des Äthers, und ebenso die Isotherme $T = 270^\circ$ des Pentans mit der Isotherme $T = 273^\circ$ des Äthers, während in bester Übereinstimmung hiermit T_* für Pentan 460,8, für Äther 466,8 ist (Messungen von Young).

Analog berechnet sich für korrespondierende Punkte

$$\frac{v_{\text{Äther}}}{v_{\text{Pentan}}} \text{ zu } 0,875,$$

was dem Wert

$$\frac{v_{* \text{Äther}}}{v_{* \text{Pentan}}} = 0,894,$$

der aus den Youngschen Messungen folgt, kaum widerspricht, wenn man bedenkt, wie unsicher alle Bestimmungen des kritischen Volumens sind. Es scheint demnach bei beiden Flüssigkeiten selbst bei den tiefsten gemessenen Temperaturen und bei hohen Drucken die Polymerisation verschwindend klein zu sein oder wenigstens das Volumen nicht merklich zu beeinflussen.

Wie vorauszusehen war, bestehen zwischen Methyl- und Äthylalkohol einerseits und Pentan und Äther andererseits diese einfachen Beziehungen nicht. Allerdings lassen sich die logarithmischen Kurvenscharen des Methylalkohols in die des Pentans ziemlich gut einordnen, wenigstens so, daß eine Korrektur von 3 Promille des Volumens in den extremsten Fällen genügen würde, um die Isothermen der einen Substanz vollständig parallel den darauf liegenden Isothermen der anderen zu machen. Es handelt sich dabei also schon um Abweichungen, die die Fehlergrenze weit übersteigen, und zwar ist vor allem bei tiefen Temperaturen und hohen Drucken die Kompressibilität des Methylalkohols zu groß gegenüber der des Pentans.

Versucht man in der bekannten Weise für korrespondierende Punkte die kritischen Daten zu berechnen, so gelangt man zu unbrauchbaren Resultaten. So ist, wenn sich die einfach gestrichenen Größen auf Methylalkohol, die zweifach gestrichenen auf Pentan beziehen,

$$\frac{P'}{P''} = 1,217,$$

während nach Landolts Tabellen $\frac{P_{\kappa'}}{P_{\kappa''}}$ zwischen 2,095 und 2,38 liegt. Dagegen ließen sich die Werte $\frac{v'}{v''} = 0,87$ mit $\frac{v_{\kappa'}}{v_{\kappa''}} = 0,861$, und ebenso $\frac{T'}{T''} = 1,13$ mit $\frac{T_{\kappa'}}{T_{\kappa''}} = 1,11$ noch in Einklang bringen.

Das Verhalten des Äthylalkohols weicht von dem des Pentans noch in erhöhtem Maße ab. Die beiden Kurvenscharen lassen sich zwar auf etwa 3 Promille des Volumens zur Deckung bringen, die daraus errechneten Verhältnisse der kritischen Daten stehen aber in vollständigem Widerspruch zu den experimentell gefundenen Zahlen. Dagegen scheinen Äthyl- und Methylalkohol ähnlichen Gesetzen zu gehorchen; denn ihre logarithmisch gezeichneten Isothermen ordnen sich so vorzüglich ineinander ein, daß die größten Abweichungen unter 1 Promille des Volumens bleiben. Die korrespondierenden Größen

$$\frac{v''}{v'} = 1,02, \quad \frac{P''}{P'} = 1,035 \quad \text{und} \quad \frac{T''}{T'} = 1,03 \text{ bis } 1,04$$

(die doppelt gestrichenen Größen beziehen sich auf Äthylalkohol, die einfach gestrichenen auf Methylalkohol) stimmen allerdings mit den Verhältnissen der kritischen Daten

$$\frac{v_{\kappa''}}{v_{\kappa'}} = 0,99; \quad \frac{P_{\kappa''}}{P_{\kappa'}} = 0,8 \text{ bis } 0,93 \quad \text{und} \quad \frac{T_{\kappa''}}{T_{\kappa'}} = 1,007$$

weniger gut überein. Wie aber bereits Meslin¹⁾ bewiesen hat, fordert die Koinzidenz der logarithmischen Kurvenscharen nur, daß für beide Substanzen dieselbe Gleichung

$$f\left(\frac{v}{\varphi}, \frac{P}{\pi}, \frac{T}{\vartheta}\right) = 0$$

gilt, wobei deren spezielle Form noch unbestimmt ist, und wobei die Größen φ , π und ϑ sich nicht gerade auf den

1) Meslin, Compt. rend. 116. S. 135. 1893.

kritischen Zustand beziehen müssen, sondern auch einen anderen ausgezeichneten Punkt der Zustandsfläche bestimmen können.

Während, wie gesagt, zu erwarten war, daß das Verhalten der Alkohole von dem des Pentans und Äthers abweichen würde, weil die Polymerisation vermutlich mit abnehmender Temperatur wächst, so war das gleiche bei Schwefelkohlenstoff, für den die Polymerisation nicht sicher feststeht, nicht bestimmt vorauszusagen.

Bei den höheren untersuchten Temperaturen (etwa 219° bis 273° abs. Temp.) passen sich die Kurven des Schwefelkohlenstoffs den des Pentans sehr gut an. Die größten Differenzen betragen nur $\frac{1}{2}$ Promille des Volumens. Mit weiterer Abnahme von T wird die Einordnung immer schlechter und schließlich weicht die Isotherme $T = 163^\circ$ des Pentans von der koordinierten Isotherme des Schwefelkohlenstoffs um etwa 4 Promille ab und zwar im Sinne einer zu starken Kompressibilität des Schwefelkohlenstoffs.

Wenn wir die einfach gestrichenen Größen auf dem Schwefelkohlenstoff, die doppelt gestrichenen auf Pentan beziehen, so ist für korrespondierende Punkte

$$\frac{T'}{T''} = 1,14 \text{ bis } 1,16$$

in guter Übereinstimmung mit

$$\frac{T'_s}{T''_s} = 1,16 \text{ bis } 1,20,$$

dagegen stehen die Werte

$$\frac{P'}{P''} = 1,497 \quad \text{und} \quad \frac{v'}{v''} = 1,054$$

in ausgesprochenem Gegensatz zu

$$\frac{P'_s}{P''_s} = 2,3 \quad \text{und} \quad \frac{v'_s}{v''_s} = 0,62.$$

Gegenstand weiterer Berechnungen war die isotherme Veränderung der Energie mit dem Volumen, die sich aus der bekannten Formel

$$\frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{\partial P}{\partial T} - P \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{a}{\mu} - P$$

(a ist der Wärmeausdehnungskoeffizient, μ die Kompressibilität, U die Energie) sich ergibt. Selbstverständlich machen sich alle Unsicherheiten der experimentellen Bestimmung von v , P und T bei der Berechnung von $\partial U / \partial v$ in sehr stark er-

höchtem Maße geltend. Um die Zuverlässigkeit der Werte von α und μ , welche in den Tabellen VIII—XXII (II. Teil) angegeben sind, nach Möglichkeit zu steigern, wurden sie auf Koordinatenpapier als Funktion von T aufgetragen und möglichst gleichmäßige Kurven hindurchgezogen. Diese Kurvenwerte wurden für die Rechnung verwendet. Zur Kontrolle wurde aber in manchen Fällen außerdem direkt aus den Tabellen VIII—XII P als Funktion von T und v graphisch abgeleitet und daraus $\partial P/\partial T$ berechnet. Beide Methoden führten zu genügend übereinstimmenden Resultaten.

Folgende Tabellen enthalten für verschiedene Drucke und Temperaturen $\partial U/\partial v$, ausgedrückt in Atmosphären (eine Atmosphäre ist gleich 1 kg pro Kubikzentimeter).

Tabelle XXIII.

Isopentan.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	0°	– 20°	– 40°	– 60°	– 80°	– 100°
0	2466	2562	2650	2815	2985	3040
100	2454	2615	2715	2838	3035	3150
200	2470	2608	2730	2820	2980	3148
300	2510	2570	2675	2800	2970	3155
400	2575	2625	2700	2810	2955	3145
500	2660	2663	2690	2780	2880	3095
600	2655	2655	2643	2750	2840	3065
700	2655	2660	2630	2680	2801	3060
800	2640	2680	2630	2660	2760	3060
900	2610	2640	2610	2622	2710	3025
1000	2550	2565	2565	2575	2640	2975

Tabelle XXIV.

Äther.

P in Atm.	$\partial U/\partial v$					
	– 10°	– 20°	– 40°	– 60°	– 80°	– 100°
0	2810	2925	3170	3360	3475	3495
100	2960	2982	3145	3315	3461	3555
200	3010	3005	3130	3290	3455	3565
300	3010	3000	3083	3265	3440	3580
400	2980	2995	3070	3260	3430	3575
500	3010	2980	3055	3190	3370	3570
600	2995	2965	3010	3130	3270	3530
700	2982	2950	3000	3090	3205	3450
800	2975	2942	2990	3120	3180	3350
900	2958	2870	2950	3075	3155	3250
1000	2895	2770	2815	2960	3100	3200

Tabelle XXV.
Methylalkohol.

P in Atm.	$\partial U / \partial v$				
	- 10°	- 30°	- 50°	- 70°	- 90°
0	3170	3202	3343	3517	3685
100	3170	3202	3316	3503	3660
200	3153	3204	3282	3454	3575
300	3203	3225	3282	3415	3525
400	3220	3260	3290	3390	3500
500	3216	3268	3302	3390	3530
600	3202	3240	3283	3400	3510
700	3170	3180	3210	3400	3490
800	3145	3145	3142	3360	3490
900	3095	3101	3095	3320	3495
1000	3075	3080	3080	3280	3490

Tabelle XXVI.
Äthylalkohol.

P in Atm.	$\partial U / \partial v$					
	0	- 20°	- 40°	- 60°	- 80°	- 100°
0	2900	2935	3025	3180	3390	3630
100	3030	3075	3150	3260	3430	3620
200	3070	3135	3195	3285	3380	3555
300	3095	3165	3210	3270	3350	3490
400	3125	3160	3190	3250	3335	3445
500	3130	3130	3170	3250	3315	3390
600	3140	3140	3160	3225	3300	3370
700	3160	3150	3170	3200	3260	3330
800	3145	3145	3170	3185	3210	3290
900	3140	3150	3160	3160	3170	3210
1000	3100	3140	3155	3140	3110	3150

Tabelle XXVII.
Schwefelkohlenstoff.

P in Atm.	$\partial U / \partial v$					
	0°	- 20°	- 40°	- 60°	- 80°	- 90°
0	3955	4130	4180	4245	4320	4370
100	3950	4040	4130	4190	4230	4350
200	3910	3980	4075	4120	4220	4290
300	3895	3930	4040	4060	4160	4210
400	3905	3935	4025	4010	4100	4150
500	3925	3955	4005	3995	4060	4090
600	3895	3960	3960	3960	4025	4045
700	3860	3880	3905	3970	4000	4010
800	3810	3795	3805	3870	3970	3990
900	3765	3700	3710	3780	3910	
1000	3740	3625	3615	3680	3820	

In den Figg. 1—5 ist $\partial U/\partial v$ für die einzelnen Isothermen als Funktion der Volumina angegeben. Diese sind den Tabellen XIII bis XXII (vgl. II. Teil) entnommen. Trotz der

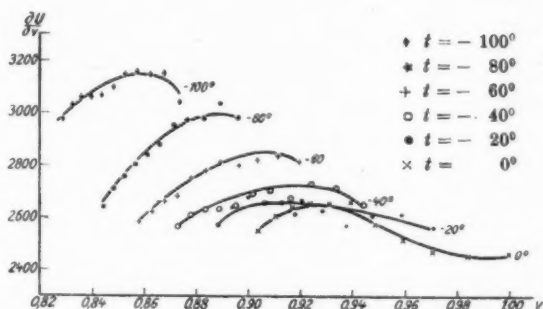


Fig. 1. Isopentan.

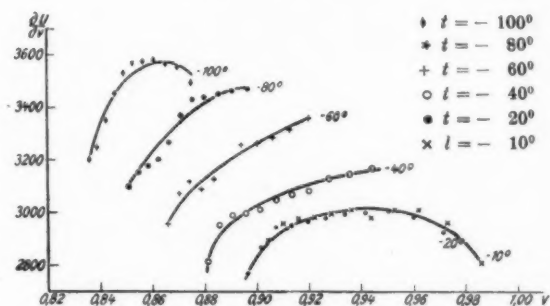


Fig. 2. Äthyläther.

selbstverständlichen Unsicherheit, mit der die einzelnen Werte von $\partial U/\partial v$ behaftet sind, erlaubt die Betrachtung der Diagramme bestimmte Aussagen über den Verlauf der Kurven:

1. Wie zu vermuten war, ist die Ähnlichkeit des Verhaltens zwischen den beiden nicht polymerisierenden Substanzen Pentan und Äther am größten; die Kurven des Methyl- und Äthylalkohols sowie des Schwefelkohlenstoffs unterscheiden sich von denen des Pentans und Äthers wie auch untereinander sehr deutlich.

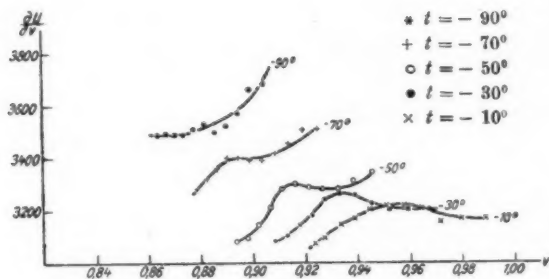


Fig. 3. Methylalkohol.

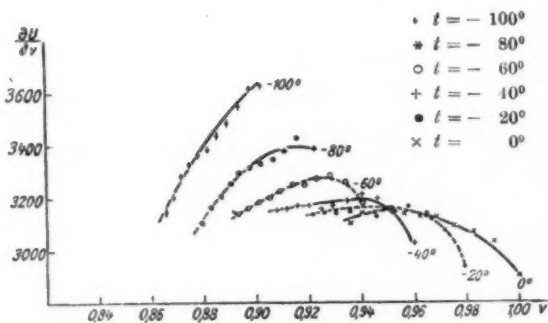


Fig. 4. Äthylalkohol.

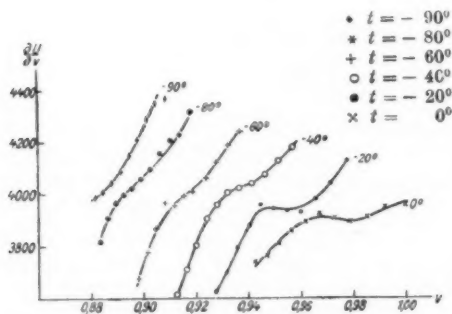


Fig. 5. Schwefelkohlenstoff.

2. Allen Flüssigkeiten gemeinsam ist, daß $\partial U/\partial v$ bei kleinem v mit diesem wächst und außer bei Schwefelkohlenstoff einem Maximum zuzustreben scheint, das allerdings nicht in allen Fällen erreicht wird. Für größere Werte von v nimmt dann $\partial U/\partial v$ wieder ab.

3. Für Temperaturen, die oberhalb -30° liegen, fallen, abgesehen vom Schwefelkohlenstoff die Kurven einer Substanz nahezu zusammen oder kreuzen sich. Hier ist also

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial v} \right)$$

nahezu gleich Null. Allgemein gilt für die tieferen Temperaturen, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial v} \right)_v < 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} < 0.$$

Auf letztere Tatsache hat in einer Arbeit, die mir erst verspätet zu Händen kam, M. K. Zakrczewski¹⁾, der $\partial c_v/\partial v$ nach der bekannten Formel

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2}$$

aus unseren Messungen berechnet hat, hingewiesen.

Eine Deutung der unter 2. und 3. zusammengefaßten Gesetzmäßigkeiten ergibt sich daraus, daß die isotherme Energieänderung $\partial U/\partial v$ zusammengesetzt ist:

I. Aus der Arbeit gegen die inneren Anziehungskräfte. Diese ist positiv und nimmt sicherlich mit wachsendem Volumen ab. Über ihre Abhängigkeit von der Temperatur bei gegebenem v ist schwer etwas auszusagen.

II. Aus der Änderung der lebendigen Kraft der Moleküle mit wachsendem v bei gegebenem T . Diese können wir wohl in erster Annäherung gleich Null setzen.²⁾

1) M. K. Zakrczewski, Anz. d. Akad. d. Wissensch. in Krakau Nr. 4—6. 1917.

2) M. Reinganum, Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung. Dissertation Göttingen 1899.

III. Aus der Änderung der intramolekularen Schwingungsenergie der Atome mit wachsendem v . Wir können den negativen Wert von $\partial e_i / \partial v$ nur so deuten, daß die Atomenergie, wieschon Hr. Zakrczewski hervorgehoben hat, gleichzeitig mit der Dichte abnimmt, daß also nach der Quantentheorie demnach die Atomfrequenz desto kleiner ist, je dichter die Moleküle liegen. Wie ganz verständlich ist, werden durch benachbarte Atome die einem anderen Molekül angehören, die intramolekularen Anziehungskräfte teilweise kompensiert, und dadurch wird die Frequenz herabgesetzt. Bei großer Dichte nähert sich eben der flüssige Zustand bereits dem festen, in dem, nach den Beugungsversuchen der Röntgenstrahlen zu schließen, die Bedeutung des intramolekularen Verbandes zurücktritt, und jedes Atom ein mehr oder minder selbständiges Individuum darstellt. Der III. Teil von $\partial U / \partial v$ ist demnach negativ und nähert sich mit wachsendem v dem Nullwert, während er sich mit abnehmendem v mehr und mehr geltend macht. Dies beweist die nach unten konkave Krümmung der $\partial U / \partial v$ -Kurven. Auffallend ist bei Schwefelkohlenstoff der große positive Wert von $\partial^2 U / \partial v^2$, der darauf schließen läßt, daß hier der III. Teil von $\partial U / \partial v$ sich besonders stark geltend macht.

IV. Bei polymerisierten Flüssigkeiten aus der Dissoziationsenergie. Diese dürfte den Gesamtwert von $\partial U / \partial v$ kaum sehr stark bestimmen, wie ein Vergleich zwischen den Kurvenscharen des polymerisierten Äthylalkohols und des nicht polymerisierten Äthers zeigt, die sich in ihrem Verlauf nicht prinzipiell voneinander unterscheiden.

Aachen, November 1920.

(Eingegangen 24. November 1920.)

7. Entgegnung auf die Bemerkung von M. Wien zu unserer Arbeit: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“;

von W. Hahnemann und H. Hecht.

Wir stimmen mit Hrn. Wien überein, daß der von uns in unserer Arbeit vorgenommene Vergleich der von Hrn. Wien für die Reizschwelle des Ohres gemessenen Werte mit unseren Ergebnissen nicht möglich ist, weil den zu messenden Größen eine verschiedene Definition zugrunde liegt. Unter Reizschwelle des Ohres ist diejenige Energie zu verstehen, die an der Empfindungsschwelle von dem Trommelfell des Ohres aufgenommen und von dort ans innere Ohr weitergegeben wird. Bei gesunden Ohren ist der Anteil der Energie, welche von den übrigen Teilen des äußeren Ohres, z. B. durch Knochenleitung zum inneren Ohr gelangt, neben der durch das Trommelfell übermittelten, verschwindend.

Hr. Wien legt seiner Bestimmung diejenige Schallenergie zugrunde, welche an der Reizschwelle bei freier Ausbreitung des Schalles durch eine Fläche von der Größe des Trommelfelles hindurchtritt, wobei, wie Hr. Wien in seiner „Bemerkung“ nochmals ausdrücklich betont, „es unerörtert bleibt, ob wirklich die durch den Gehörgang auf das Trommelfell treffende, dort absorbierte Energie mit der so definierten übereinstimmt“. Wir definieren als Reizleistung diejenige Leistung, welche an der Schwelle beim Andrücken des Telephons von dem ganzen durch die Schallwellen getroffenen äußeren Ohr, bestehend aus Ohrkanal, Trommelfell und den anschließenden Teilen, absorbiert wird. Um einen Vergleich der beiderseitigen Ergebnisse möglich zu machen, müßte deshalb auf der einen Seite bei dem Wienschen Wert die Wirkung des Kopfes und des Gehörganges auf die Schallbewegung bis zum Trommelfell und vor allem die Energieaufnahme des Trommelfelles selbst zahlen-

mäßig festgestellt werden. Andererseits müßte bei unseren Versuchen der Anteil bestimmt werden, der von der gesamten vom Ohrkanal, Trommelfell und den anschließenden Teilen des Ohres absorbierten Energie auf das Trommelfell allein entfällt.

Diese Aufgaben exakt zu lösen ist wohl unmöglich. Wir glauben daher, daß ein direkter Vergleich der beiderseitigen Werte nur gewonnen werden kann, wenn nach beiden Methoden neue Versuche an demselben Telephon ausgeführt werden. Wie wir bereits in unserer ersten Arbeit erwähnt haben, können wir jedoch nicht mehr auf derartige Messungen zurückkommen und wollen daher nur das wiederholen, was wir dort bereits gesagt haben, daß wir uns freuen würden, wenn von anderer Seite nach beiden Methoden experimentiert würde und die für verschiedene Anwendungszwecke so notwendigen beiden Bestimmungen des Wirkungsgrades eines Telephons und der Reizleistung des menschlichen Ohres von neuem ausgeführt würden.

(Eingegangen 16. November 1920.)

